

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Louis Pasteur - Strasbourg I

Discipline : **Mathématiques appliquées**

par

Nicolas BESSE

**Etude mathématique et numérique de l'équation
de Vlasov non linéaire sur des maillages non
structurés de l'espace des phases**

Soutenue publiquement le 24 septembre 2003, à Strasbourg

Membres du Jury

<i>Directeur de Thèse :</i>	Eric SONNENDRÜCKER	Professeur à l'Université Louis Pasteur, Strasbourg.
<i>Rapporteur Externe :</i>	Naoufel BEN ABDALLAH	Professeur à l'Université Paul Sabatier, Toulouse.
<i>Rapporteur Externe, Président du Jury :</i>	Laurent DESVILLETES	Professeur à l'ENS, Cachan.
<i>Rapporteur Interne :</i>	Bopeng RAO	Professeur à l'Université Louis Pasteur, Strasbourg.
<i>Examineur :</i>	Jacques SEGRÉ	Ingénieur CEA, Saclay.

Je tiens avant tout à remercier E. Sonnendrücker pour m'avoir proposé un sujet de thèse riche et passionnant. Malgré son éloignement géographique j'ai pu bénéficier de ses nombreuses qualités scientifiques et humaines. La grande liberté qu'il m'a laissée dans mes travaux de recherche témoigne de sa confiance en mon travail.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers J. Segré qui m'a accueilli dans son feu laboratoire d'études en électromagnétisme (L2EM) au Commissariat à l'Énergie Atomique de Bruyères-le-Châtel en Essonne. J'ai apprécié son enthousiasme et sa gentillesse ainsi que ses conseils sur le plan numérique qui m'ont toujours été profitables.

Je remercie N. Ben Abdallah, L. Desvilletes et B. Rao d'avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et de l'intérêt qu'ils ont témoigné pour mon travail. Leurs remarques m'ont permis de préciser certains points de ce document.

Je garderai d'excellents souvenirs des membres du laboratoire L2EM et plus particulièrement de K.C. Lethanh, P. Lacoste, C. Couillaud, F. Assous, M. Bernard et P.-A. Raviart, avec lesquels j'ai eu des discussions enrichissantes.

Je remercie aussi D. Bouche pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail, et pour m'avoir donné l'accès à une large communauté scientifique.

Ma reconnaissance va également à l'équipe d'analyse numérique de l'université Louis Pasteur à Strasbourg (F. Filbet, M. Gütnic, I. Paun, E. Sonnendrücker) avec qui j'ai eu le plaisir et la chance de collaborer.

Je remercie l'IRMA de Strasbourg (E. Sonnendrücker), le CEA de Bruyères-le-Châtel, le CEA de Cadarache (Virginie Grandgirard) et le réseau HYKE (Cédric Villani) pour m'avoir permis de participer à différentes manifestations scientifiques, stimulantes pour l'esprit, (Workshops, Conférences, écoles d'été, CEMRACS'01, CEMRACS'03) en France et à l'étranger.

Enfin je remercie tous les membres du service PPE qui ont rendu mon séjour au CEA agréable : François, Gilles, Didier, Christian, Mathieu, Didier, Pierre, Stéphane, Audine, Thierry, Emmanuelle, Alain, Benoît, Nicolas, Laurent. Je remercie également Mme Lucas pour sa patience et son efficacité.

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Le contexte physique	10
1.2	Le problème de Cauchy	13
1.2.1	Solutions faibles :	16
1.2.2	Solutions classiques :	17
1.3	Résumé de la thèse	19
1.3.1	Etude mathématique de quelques schémas de type semi-Lagrangien pour le système de Vlasov-Poisson	19
1.3.2	Méthodes numériques pour l'équation de Vlasov sur des maillages non structurés et adaptatifs de l'espace des phases à plusieurs dimensions.	21
2	Analyse de convergence de quelques schémas de type semi-Lagrangien pour le système de Vlasov-Poisson	23
2.1	Introduction	24
2.2	Le problème continu	26
2.2.1	Définitions et notations	29
2.2.2	Existence, unicité et régularité des solutions du problème continu	31
2.3	Convergence d'un schéma semi-Lagrangien sur un maillage non structuré de l'espace des phases	33
2.3.1	Hypothèses de régularité pour le problème continu	33
2.3.2	Le problème discret	33
2.3.2.1	Espaces d'approximation et opérateurs d'interpolation	33
2.3.2.2	Opérateurs de transport	34
2.3.3	Le schéma numérique	35
2.3.4	Analyse de convergence	35
2.3.4.1	Théorème principal	35
2.3.4.2	Idée de la preuve	36
2.3.4.3	Estimations <i>a priori</i>	36
2.3.5	Autres résultats	45
2.4	Convergence de plusieurs classes de schémas semi-Lagrangiens d'ordre élevé	58
2.4.1	Hypothèses de régularité pour le problème continu	58
2.4.2	Le problème discret.	58

2.4.2.1	Espaces d'approximation et opérateurs d'interpolation	58
2.4.2.2	Opérateurs de transport	60
2.4.3	Le schéma numérique	61
2.4.4	Définitions et notations	61
2.4.5	Analyse de convergence	63
2.4.5.1	Théorème principal	63
2.4.5.2	Idée de la preuve	63
2.4.5.3	Estimations <i>a priori</i>	64
2.4.6	Autres résultats	76
2.4.6.1	Reconstruction par B-splines	76
2.4.6.2	Reconstruction par ondelettes	86
2.5	Convergence d'un schéma semi-Lagrangien avec propagation de gradients	95
2.5.1	Hypothèses de régularité pour le problème continu	95
2.5.2	Le problème discret	95
2.5.2.1	Opérateurs d'interpolation	95
2.5.2.2	Opérateurs de transport	97
2.5.3	Le schéma numérique	101
2.5.4	Analyse de convergence	101
2.5.4.1	Théorème	101
2.5.4.2	Idée de la preuve	102
2.5.4.3	Estimations <i>a priori</i>	102
2.6	Conclusions	125
3	Schémas semi-Lagrangien pour l'équation de Vlasov 1D dans l'espace des phases	127
3.1	Introduction.	128
3.2	L'équation de Vlasov	131
3.3	Principe d'une méthode semi-Lagrangienne	134
3.4	Détermination des courbes caractéristiques	135
3.5	Méthodes d'interpolation.	135
3.6	Les schémas numériques	135
3.6.1	Interpolation de Lagrange	140
3.6.2	Interpolation de type Hermite	143
3.6.2.1	L'élément réduit \mathcal{C}^0 d'Hermite (HC0).	145
3.6.2.2	L'élément cubique \mathcal{C}^0 de Nielson (NC0).	146
3.6.2.3	L'élément cubique \mathcal{C}^1 rationnel singulier de Nielson (NC1).	147
3.6.2.4	L'élément cubique \mathcal{C}^1 de Hsieh-Clough-Tocher complet (HCT-C)	148
3.6.2.5	L'élément cubique \mathcal{C}^1 réduit de Hsieh-Clough-Tocher (HCT-R)	149
3.6.2.6	L'élément quartique \mathcal{C}^1 de Ganev-Dimitrov	150
3.6.3	Discrétisation complète du schéma	152
3.6.4	Schémas conservatifs et positifs	153

3.7	Résultats numériques	157
3.7.1	L'amortissement Landau linéaire	157
3.7.2	L'amortissement Landau non linéaire	158
3.7.3	L'instabilité double faisceaux	161
3.8	Quelques perspectives	164
3.8.1	Méthodes <i>a posteriori</i> pour la conservation des invariants .	164
3.8.2	Autres reconstructions	172
3.8.3	Propagation des dérivées d'ordre supérieur	172
3.8.4	Méthodes sans maillage	172
4	Méthodes numériques pour l'équation de Vlasov axisymétrique	175
4.1	Le modèle paraxial	176
4.2	L'équation de Vlasov axisymétrique	178
4.3	Solutions stationnaires	181
4.3.1	La distribution K-V (Kapchinsky-Vladimirsky)	183
4.3.2	La distribution de Maxwell-Boltzmann	184
4.4	Discrétisation de l'équation de Vlasov axisymétrique.	186
4.5	La focalisation	188
4.6	Résultats numériques.	190
4.6.1	Faisceau semi-Gaussien	190
4.6.2	Le faisceau de Maxwell-Boltzmann	190
4.6.3	Faisceau Gaussien	193
4.7	Conclusions	193
5	Méthodes numériques pour l'équation de Vlasov 2D	197
5.1	Le modèle	198
5.2	Résolution de l'équation de Vlasov	198
5.2.1	Semi-discrétisation en temps	198
5.2.2	Discrétisation dans l'espace des phases	200
5.3	Résolution de l'équation de Poisson	201
5.3.1	Equation de Poisson avec conditions aux limites périodiques	201
5.3.2	Equation de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet	203
5.3.2.1	Formulation variationnelle	203
5.3.2.2	Conditions aux limites	205
5.3.3	Résolution des systèmes linéaires	208
5.4	Résultats numériques	209
5.4.1	Amortissement Landau linéaire	209
5.4.2	Faisceau Gaussien	210
5.5	Conclusion	211
6	Méthodes adaptatives pour l'équation de Vlasov basées sur une analyse multi-résolution	215
6.1	introduction	216
6.2	Analyse multi-résolution	216
6.2.1	Cas mono-dimensionnel	217
6.2.2	Cas multi-dimensionnel	219

6.3	Les algorithmes	220
6.3.1	L'algorithme non adaptatif	221
6.3.2	L'algorithme adaptatif	221
6.3.3	Mise en oeuvre	222
6.4	Résultats numériques	225
6.4.1	Le cylindre fendu tournant	226
6.4.2	Le faisceau Gaussien	229
6.4.3	Le faisceau semi-Gaussien	233
6.4.4	Temps de calcul	234
6.5	Conclusion	237
	Bibliographie	237

Chapitre 1

Introduction

Sommaire

1.1	Le contexte physique	10
1.2	Le problème de Cauchy	13
1.2.1	Solutions faibles :	16
1.2.2	Solutions classiques :	17
1.3	Résumé de la thèse	19
1.3.1	Etude mathématique de quelques schémas de type semi-Lagrangien pour le système de Vlasov-Poisson	19
1.3.2	Méthodes numériques pour l'équation de Vlasov sur des maillages non structurés et adaptatifs de l'espace des phases à plusieurs dimensions.	21

1.1 Le contexte physique

Notre environnement immédiat est essentiellement composé de matière sous forme liquide, solide ou gazeuse. Lorsque cette matière est portée à haute température, la vaporisation, puis la dissociation et finalement l'ionisation conduisent à un état de la matière appelé plasma ou évoluent des populations d'ions et d'électrons. Sorte de quatrième état de la matière les plasmas composent 99% de l'univers. Un plasma peut être créé à partir de tout système apportant de manière efficace et rapide de l'énergie à un échantillon liquide, solide ou gazeux. Les principaux procédés sont l'ionisation thermique, photonique, par collision d'électrons énergétiques ... Les domaines d'application des plasmas sont nombreux, tant sur le plan scientifique (la fusion thermonucléaire contrôlée, l'astrophysique, l'interaction laser-matière, propagation de faisceaux de particules chargées, ...) que sur le plan technologique (traitement de surfaces et de matériaux, semi-conducteurs, écrans plasmas, ...). De nombreux ouvrages de références sur la physique des plasmas existent, aussi nous citons "Physique des plasmas" de J.L Delcroix et A. Bers [65], et "Principles of plasma physics" de N.A. Krall and A.W. Trivelpiece [131], à titre d'exemples. Dans un plasma, les charges négatives et positives en interaction Coulombienne mutuelle, sont soumises à deux effets contradictoires et complémentaires : une tendance au désordre due à l'agitation thermique et une tendance à l'organisation due à l'aspect collectif que manifeste l'interaction Coulombienne. Le compromis entre ces deux tendances peut être quantifié par un paramètre sans dimension, le paramètre de couplage Γ donné par

$$\Gamma = \frac{\langle E_p \rangle}{\langle E_c \rangle} = \frac{q\phi_0}{m\bar{v}^2} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 k_B T r_0},$$

où $\langle E_c \rangle = nm\bar{v}^2 = nk_B T$ est l'ordre de grandeur de la densité volumique d'énergie cinétique avec T la température et $\langle E_p \rangle = qn\phi_0 = \frac{ng^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}$ est l'ordre de grandeur de la densité volumique d'énergie potentielle électrostatique, où r_0 est la portée des interactions, avec k_B la constante de Boltzmann, q la charge de l'électron et ϵ_0 la permittivité du vide. Ce paramètre permet de distinguer les plasmas faiblement couplés, cinétiques ou idéaux ($\Gamma < 1$), des plasmas fortement couplés ($\Gamma > 1$). Ici on ne considèrera que des plasmas cinétiques, $\Gamma < 1$ (majorité des plasmas naturels et de laboratoire), les plasmas fortement couplés relevant de la physique des milieux condensés. L'un des concepts fondamentaux de la physique des plasmas cinétiques est celui de la quasi-neutralité et d'écrantage électrique. En tenant compte du principe phénoménologique selon lequel tout système dynamique (exceptées les instabilités) évolue de manière à minimiser les forces qui l'entraînent, le plasma se réarrange de manière à annuler la densité volumique de force de Coulomb qui se traduit par un agencement de charge tel que

$$n_e - Zn_i \approx 0,$$

ou n_e est la densité électronique, n_i la densité ionique et Z l'état d'ionisation. Evidemment si la densité volumique de charge était nulle sur toutes les échelles de longueur il n'y aurait plus d'interactions électriques. En fait il faut considérer

que $n_e - Zn_i \ll 1$ est un petit paramètre et qu'au dessus d'une certaine échelle de longueur ℓ on peut considérer que $n_e - Zn_i = 0$. La tendance au désordre due à l'agitation thermique et la tendance à l'organisation due aux interactions Coulombiennes collectives permettent au plasma de rester sous forme ionisé, tout en restant globalement neutre, en créant des conditions s'opposant à la séparation de charge sur des distances supérieures à une échelle de longueur ℓ et des processus dynamiques plus lents qu'une échelle de temps τ . Une telle neutralité, dans un volume supérieur à ℓ^3 et pour une durée supérieure à τ , est appelée quasi-neutralité car pour des volumes inférieurs à ℓ^3 et une dynamique plus rapide que τ , une séparation de charge et un champ électrique peuvent apparaître. Il reste maintenant à identifier les deux échelles mésoscopiques ℓ et τ . La longueur caractéristique ℓ notée λ_D , s'appelle la longueur de Debye et est définie par

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha} q_{\alpha}^2}{\varepsilon_0 k_B T_{\alpha}},$$

où α désigne l'espèce des particules, n_{α} leur densité et T_{α} leur température. Elle correspond à une longueur d'écrantage du potentiel électrique ou encore à une longueur critique d'interaction collective. Dans une situation statique, la longueur de Debye correspond à la longueur au dessous de laquelle on peut observer une brisure de la neutralité. Si on considère une sphère de rayon λ_D , centrée sur chaque ion du plasma, à l'extérieur de chacune de ces sphères le plasma est quasi-neutre car le potentiel est exponentiellement petit (phénomène d'écrantage électrique). Au dessus de cette échelle l'individualité des particules disparaît pour laisser la place à un nuage électronique ou s'exercent des forces Coulombiennes collectives (ou multiples), à longue portées (ou lointaines), générées par le mouvement d'ensemble des particules et que l'on matérialise par des champs moyens électromagnétiques (interaction champ-particules). Ce résultat est valable si le nombre d'électrons dans la sphère de Debye est très grand devant 1, i.e., $n\lambda_D^3 = \frac{1}{g} \gg 1$, avec g le paramètre plasma. En prenant $r_0 = \lambda_D$ (la portée des interactions est de l'ordre de la longueur de Debye) la condition $g \ll 1$ est équivalente à la définition des plasmas cinétiques, i.e, $\Gamma \ll 1$. Lorsque $r_0 < \lambda_D$ et $n\lambda_D^3 > 1$, l'intérieur de la sphère de Debye est une zone non neutre ou s'exercent des interactions particules-particules de types divers (chocs binaires, chocs lointains). Pour étudier la dynamique à l'intérieur de la sphère de Debye on introduit la longueur de Landau λ_L , longueur critique d'interaction binaire qui représente la distance à laquelle il faut que deux électrons s'approchent pour que leur énergie d'interaction binaire soit du même ordre de grandeur que leur énergie cinétique. Elle est définie par

$$\lambda_L = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 k_B T}.$$

Il existe plusieurs modèles pour rendre compte des collisions entre particules : l'opérateur de Landau, caractérisé par $n\lambda_D^3 \sim 1$ et $\Gamma \ll 1$ néglige à la fois les effets collectifs et chocs proches (binaires) pour ne tenir compte que des collisions lointaines (à faibles déviations). Cependant il apparaît une divergence pour les

grands paramètres d'impact (provenant du potentiel d'interaction Coulombien) que l'on supprime en faisant la coupure à la longueur de Debye. Cette divergence traduit le rôle prépondérant des collisions rasantes sur toutes les autres collisions. Autrement dit le comportement d'une particule arbitraire est plus influencé par les particules lointaines (grands paramètres d'impact) que par les particules voisines. Par ailleurs l'intégrale de collision est limitée inférieurement par les petits paramètres d'impact d'ordre λ_L . En fait l'équation de Landau peut être vu comme une tentative d'application de l'équation de Boltzmann (équation modélisant des collisions binaires, à courte portée, pour de faibles densité, caractérisées par $n\lambda_L^2 \ll 1$ et $\Gamma \sim 1$, sous l'hypothèse de chaos moléculaire dans le cas des gaz dilués d'atomes ou de molécules neutres) aux plasmas. En effet il est bien connu dans la littérature ([64, 68]) que l'équation de Landau est obtenue en supposant que les collisions lointaines ou rasantes sont prépondérantes (ce qui revient à prendre un nombre infini de particules dans la sphère de Debye, i.e. $n\lambda_D^3 = g^{-1} \rightarrow \infty$, ou à prendre $\lambda_D/\lambda_L \rightarrow \infty$) dans l'équation de Boltzmann. Il reste maintenant à identifier l'échelle de temps τ . La tendance à la neutralité est aussi caractérisée par une échelle de temps. Les perturbations ou les processus lents laissent le temps au plasma de se réorganiser afin de neutraliser les perturbations et de demeurer dans l'approximation quasi-neutre. Au contraire les processus ou les perturbations rapides vont briser la quasi-neutralité, induire une séparation de charges et créer un sillage d'ondes plasma non-neutre. L'échelle de temps associée à la réponse électronique (temps nécessaire au plasma pour neutraliser une perturbation électronique) est donc l'inverse de la pulsation plasma ω_p (ou fréquence de Langmuir) définie comme

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q^2}{\varepsilon_0 m_e}$$

où n_0 est la densité électronique à l'équilibre et m_e la masse de l'électron. Si sur des intervalles de temps $t \sim t_p = 2\pi\omega_p^{-1}$ l'équation de Vlasov qui décrit un comportement collectif du plasma est une bonne approximation de la dynamique des particules, pour des temps $t \sim t_r = \nu_c^{-1}$, où t_r est le temps de relaxation par collisions (ν_c est la fréquence de collision) l'équation de Vlasov n'est plus une bonne approximation des phénomènes physiques en temps long. Si on ajoute au second membre de l'équation de Vlasov l'opérateur de collision de Balescu-Lénard on décrit de façon self-consistante les effets de collisions et les effets collectifs. L'équation de Vlasov-Balescu-Lénard qui est un des meilleurs modèles pour représenter l'évolution des plasmas cinétiques classiques est caractérisé par $n\lambda_D^3 \gg 1$ et $\Gamma \ll 1$. Le noyau de collision de Balescu-Lénard caractérise donc l'influence prépondérante des collisions lointaines avec effets collectifs où le paramètre d'impact est supérieur ou égal à la longueur de Debye. L'intégrale ne diverge pas pour les petites déviations angulaires mais pour les petits paramètres d'impact. On tronque alors l'intégrale pour les paramètres d'impact plus petits que λ_L . L'équation de Landau qui est obtenue en prenant l'asymptotique $n\lambda_L^3 \rightarrow 0$ (ou $\lambda_L \rightarrow 0$), en supposant que la fonction intervenant dans la définition de la permittivité longitudinale ϵ est en première approximation une Maxwellienne isotrope, dans l'équation de Balescu-Lénard, est en général une très

bonne approximation. Les équations de Landau et de Balescu-Lénard peuvent par un changement d'écriture se mettre sous la forme dite de Fokker-Planck dans laquelle on distingue une force de friction et une matrice de diffusion non linéaires (dépendant de la fonction de distribution) dans l'espace des vitesses. Si on exprime la force de dérive et la matrice de diffusion en fonction des potentiels de Rosenbluth, dans certains cas particuliers, comme le cas où la fonction de distribution est isotrope, en faisant un développement de la fonction de distribution en polynômes de Legendre et en ne gardant que les premières harmoniques, on peut calculer de manière explicite les coefficients de transport et obtenir ainsi un modèle de dérive-diffusion.

Il existe d'autres échelles caractéristiques pour décrire les phénomènes physiques prépondérants dans les plasmas : la longueur de London associée à l'écrantage magnétique ; la longueur de Kelvin définissant l'épaisseur de peau résistive ; la vitesse d'Alfvén caractérisant la vitesse d'entraînement des ions en réponse à une perturbation magnétique lorsque cette perturbation cherche à pénétrer un plasma initialement non magnétisé ou la vitesse caractéristique de propagation de perturbations magnétiques dans un plasma magnétisé ; la vitesse acoustique ionique caractérisant la réponse ionique à une perturbation lente de la population électronique (qui a le temps de préserver la quasi-neutralité) ; le rayon et la fréquence de Larmor caractérisant le mouvement de giration hélicoïdal des particules autour des lignes du champ magnétique ; et enfin les sections efficaces intervenants dans les noyaux de collisions qui caractérisent la physique des processus de collisions. Pour plus détails sur ces grandeurs on invite le lecteur à consulter le livre [65] et les références incluses.

Ici, on s'intéressera à des plasmas de type Vlasov, caractérisés par $n\lambda_D^3 \gg 1$ et $v_c/\omega_p \ll 1$, où les collisions entre particules sont négligées.

1.2 Le problème de Cauchy

L'équation de Vlasov décrit l'évolution d'un système de particules chargées soumises aux forces Coulombiennes collectives, de longue portée, représentées par des champs électromagnétiques moyens (ou champs auto-consistants) et des forces extérieures appliquées. La fonction $f(t, x, \xi)$, qui dépend du temps t , de la position dans l'espace physique x , et de de l'impulsion ξ , représente la fonction de distribution des particules dans l'espace des phases. L'évolution de la densité de particules $f(t, x, \xi)$, dans l'espace des phases $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $d = 1, \dots, 3$ est donnée par l'équation de Vlasov,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v(\xi) \cdot \nabla_x f + F(t, x, \xi) \cdot \nabla_\xi f = 0, \quad (1.1)$$

qui peut se déduire de l'équation de Liouville (qui exprime la conservation de la mesure du volume de l'espace des phases lors de l'évolution du système) soit par la méthode régressive BBGKY qui consiste à établir un système infini d'équations couplées dont chacune décrit l'évolution d'une fonction de distribution réduite (obtenue en intégrant la fonction de distribution à N corps), soit par la méthode perturbative de Prigogine et Balescu qui cherche directement une solution

formelle de l'équation de Liouville (résolution d'un problème à valeur initiale) sous forme de séries dont l'ordre de grandeur des termes dépend de trois paramètres. Certaines considérations physiques (les corrélations entre particules sont négligées) permettent alors soit de conserver un nombre fini d'équations de la hiérarchie BBGKY ou de conserver un nombre fini de termes de la solution de l'équation de Liouville, conduisant ainsi à l'équation de Vlasov.

Dans le cas classique la vitesse $v = v(\xi)$ est donnée par

$$v(\xi) = \xi/m$$

et dans le cas relativiste par

$$v(\xi) = \frac{\xi/m}{\sqrt{1 + |\xi|^2/m^2c^2}},$$

où m est masse d'une particule et c la vitesse de la lumière.

Dans le cas où on considère un couplage avec un champ électromagnétique, le champ de force $F(t, x, \xi)$ est donnée par la force de Lorentz

$$F(t, x, v) = q(E(t, x) + v(\xi) \wedge B(t, x)), \quad (1.2)$$

où le champ électrique E et le champ magnétique B sont solutions des équations de Maxwell

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \operatorname{rot} B = -\frac{1}{\varepsilon_0} j, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot} E = 0, \\ \operatorname{div} E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \operatorname{div} B = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

La densité de charge $\rho(t, x)$ et la densité de courant $j(t, x)$, termes sources des équations de Maxwell, sont données par

$$\rho(t, x) = q \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, \xi) d\xi, \quad j(t, x) = q \int_{\mathbb{R}^d} v(\xi) f(t, x, \xi) d\xi, \quad (1.4)$$

où q est la charge d'une particule. Les équations (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4) forment le système de Vlasov-Maxwell. Notons que la condition de compatibilité (équation de conservation de la charge)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} j = 0,$$

qui est nécessaire pour pouvoir résoudre (1.3) est vérifiée dès que f satisfait (1.1). En effet il suffit d'intégrer (1.1) par rapport à ξ .

Dans le cas où on considère un couplage avec un champ électrique le champ de force est donné par

$$F(t, x, \xi) = qE(t, x), \quad (1.5)$$

où le champ électrique E dérive d'un potentiel électrostatique qui vérifie l'équation de Poisson

$$E(t, x) = -\nabla_x \phi(t, x), \quad -\varepsilon_0 \Delta \phi(t, x) = \rho(t, x) \quad (1.6)$$

Les équations (1.1), (1.5), (1.6) et (1.4) forment le système de Vlasov-Poisson. En introduisant la solution fondamentale du laplacien $-\Delta_x$ dans \mathbb{R}^d , donnée par

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-d)\omega_d} \frac{1}{|x|^{d-2}}, & d \geq 3 \\ \frac{1}{2\pi} \ln|x|, & d = 2 \end{cases}$$

ω_d étant la surface de la boule unité de \mathbb{R}^d , le potentiel électrique $\phi(t, x)$ et le champ électrique $E(t, x)$ sont donnés par

$$\phi(t, x) = \frac{1}{\varepsilon_0} (G * \rho)(t, x), \quad E(t, x) = \frac{1}{\varepsilon_0} (K * \rho)(t, x)$$

où $K = -\nabla G$.

Si le flux $a(t, x, \xi) = (v, F(t, x, \xi))$ est suffisamment régulier, par exemple $a(t, x, \xi)$ appartient à $L^\infty([0, T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d, \mathbb{R}^{2d}))$, alors on peut définir de manière unique les courbes caractéristiques $(X(t; s, x, \xi), \Xi(t; s, x, \xi))$ associées à l'opérateur différentiel du premier ordre,

$$\frac{\partial}{\partial t} + a \cdot \nabla,$$

par le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t; s, x, \xi) = v(\Xi(t; s, x, \xi)), \\ \frac{d\Xi}{dt}(t; s, x, \xi) = F(t, X(t; s, x, \xi), \Xi(t; s, x, \xi)), \\ X(s; s, x, \xi) = x, \quad \Xi(s; s, x, \xi) = \xi, \end{cases} \quad (1.7)$$

où $(X(t; s, x, \xi), \Xi(t; s, x, \xi))$ désigne la position dans l'espace des phases à l'instant t d'une particule se trouvant à l'instant s en (x, ξ) .

Avec la régularité sur a supposée précédemment $(X(t; s, x, \xi), \Xi(t; s, x, \xi))$ appartient à $\mathcal{C}([0, T], W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d, \mathbb{R}^{2d}))$.

De plus si a appartient à $L^\infty([0, T], W^{k,\infty}(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d, \mathbb{R}^{2d}))$ pour $k \geq 1$, alors, pour tout α dans \mathbb{N}^{2d} tel que $1 \leq |\alpha| \leq k$, $\partial^\alpha (X(t; s, x, \xi), \Xi(t; s, x, \xi))$ appartient à $\mathcal{C}([0, T], L^\infty(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d, \mathbb{R}^{2d}))$. Puisque $\operatorname{div}_{(x,\xi)} a = 0$, on peut récrire l'équation de Vlasov sous forme conservative

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_{(x,\xi)}(af) = 0, \quad \forall (t, x, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (1.8)$$

avec la condition initiale

$$f(0, x, \xi) = f_0(x, \xi). \quad (1.9)$$

Dans [41] il est démontré que si $\operatorname{div}_{(x,\xi)} a$ appartient à $L^\infty([0, T], \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d)$, alors le jacobien $J(t; s, x, \xi) = \det(\partial_{(x,\xi)}(X(t; s, x, \xi), \Xi(t; s, x, \xi)))$ est uniformément borné et reste positif $\forall (t, x, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

D'après [174], pour $m \geq 1$, si $\operatorname{div}_{(x,\xi)} a$ appartient à $L^\infty([0, T], W^{m,\infty}(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d))$, a appartient à $L^\infty([0, T], W^{m,\infty}(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d, \mathbb{R}^{2d}))$, et si f_0 appartient à $W^{m,p}(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d)$ alors, la solution classique du problème (1.8)-(1.9) appartient à $L^\infty([0, T], W^{m,p}(\mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d))$, et est donnée par

$$f(t, x, \xi) = f_0(X(0; t, x, \xi), \Xi(0; t, x, \xi))J(0; t, x, \xi). \quad (1.10)$$

Cette dernière formule peut s'interpréter de la façon suivante :

La mesure $f(t, x, \xi)dx d\xi$ est l'image de la mesure $f_0(x, \xi)dx d\xi$ par la transformation $(X(0; \cdot, \cdot, \cdot), \Xi(0; \cdot, \cdot, \cdot))$. Si la mesure du volume des phases n'est pas conservée, la mesure $f_0(x, \xi)dx d\xi$, autrement dit la masse, est cependant conservée. Le fluide est compressible.

Dans le cas de Vlasov, comme $\operatorname{div}_{(x,\xi)} a = 0$, alors on a $J = 1$, et le flot $(X(t; s, \cdot, \cdot), \Xi(t; s, \cdot, \cdot))$ conserve la mesure du volume des phases (f décrit un fluide incompressible) et l'équation (1.10) devient alors

$$f(t, x, \xi) = f_0(X(0; t, x, \xi), \Xi(0; t, x, \xi)).$$

Cette dernière équation exprime que la fonction de distribution f est constante le long des caractéristiques.

Par ailleurs l'existence, l'unicité et la régularité des solutions faibles et classiques du système de Vlasov-Poisson et de Vlasov-Maxwell ont été étudiées depuis plusieurs décénies.

1.2.1 Solutions faibles :

L'existence de solutions faibles pour le système de Vlasov-Poisson fut d'abord établie par Arsenev [7], [8], puis par Illner-Neunzert [119], et enfin généralisée par Diperna-Lions [69] dans le cadre des solutions renormalisées. Zheng-Majda [218], et Ping-Qingjiu [165] ont démontré l'existence de solutions pour le système de Vlasov-Poisson lorsque la donnée initiale est une mesure de probabilité, car les lemmes de moyennes ("velocity averaging lemmas") développés par Diperna-Lions pour obtenir un résultat de compacité et par suite la stabilité des solutions faibles ne peuvent pas s'appliquer. L'existence de solutions faibles pour le système de Vlasov-Maxwell a été démontrée par Diperna-Lions dans [70]. Pour le système de Vlasov-Maxwell avec conditions aux limites on peut consulter Guo [107]. Pour un résumé sur l'existence des solutions faibles on peut consulter [41, 71]. Souvent dans les équations aux dérivées partielles non linéaires certaines estimations *a priori* sont facilement disponibles. Ces estimations proviennent de quantités (physiques ou non) qui sont naturellement conservées (énergie, moments, entropie, positivité, norme L^p , $p \in [1, \infty], \dots$). Le coeur des théorèmes d'existence des solutions faibles globales réside dans la possibilité de passer à la limite dans les équations grâce à ces estimations *a priori*. L'existence consiste d'abord à obtenir des suites de solutions régulières (pour lesquelles on voudra passer à la limite) d'un problème régularisé par un théorème de point fixe (Banach ou Schauder. En effet comme le problème est non linéaire l'existence de solutions pour le problème

régularisé se démontre en construisant une suite de solutions d'un problème linéarisé qui converge vers un point fixe d'une certaine application). Pour passer à la limite on a besoin d'un résultat de stabilité. Celui-ci est difficile à obtenir car les estimations *a priori* donnent seulement une convergence faible des suites de solutions (à une extraction de sous-suite près). En effet comme les équations comportent des termes non linéaires la convergence faible ne suffit pas pour passer à la limite et un résultat de compacité est nécessaire pour effectuer ce passage. Pour le système de Vlasov-Poisson le caractère elliptique de l'équation de Poisson permet de récupérer de la régularité sur le champ électrique E , et donc de la compacité locale en x sur E (théorème d'injection compacte de Sobolev [3] et [43]). Pour le système de Vlasov-Maxwell, les équations de Maxwell ne donnent pas de régularité elliptique. Pour passer à la limite, on récupère de la compacité à partir des lemmes de régularité en moyenne (cf [72], [37] et [41]). Néanmoins la régularité et l'unicité de ces solutions faibles globales sont encore des problèmes ouverts malgré un premier résultat dû à Robert [176].

1.2.2 Solutions classiques :

Pour le système de Vlasov-Poisson l'existence locale en temps a été établie par Kurth [133]. L'existence et l'unicité des solutions classiques ont été démontrées par Iordanskii [118] et Cooper-Klimas [54] en une dimension, Ukai-Okabe [200] en deux dimensions, Bardos-Degond [14] en trois dimensions pour une donnée initiale petite. Le cas d'une condition initiale symétrique (symétrie sphérique et cylindrique) ou presque symétrique a été traité par Batt [15], Wollman [207], Horst [116], Schaeffer [184], et le cas relativiste a été traité par Glassey-Schaeffer [96]. Le cas d'une condition initiale générale, lipschitzienne continue dans $L_x^\infty(L_v^1)$, a été traité par Pfaffelmoser [161], que l'on trouve sous une forme simplifiée et optimisée dans Schaeffer [185], et Horst [117]. On présente ici leurs résultats. Soit $Q(t)$ la borne maximale du support en vitesse de la fonction de distribution définie par

$$Q(t) = 1 + \sup \{ |v| : \exists x \in \mathbb{R}^3, \tau \in [0, t] \mid f(\tau, x, v) \neq 0 \},$$

alors d'après les résultats d'existence locale (voir [15, 116]), f peut être prolongée par continuité sur $[0, T]$ pour tout temps T fini à condition qu'il existe une constante C_T ne dépendant que de T telle que

$$Q(t) \leq C_T \text{ pour } 0 \leq t \leq T.$$

Théorème 1 *Soit f_0 une fonction positive appartenant à \mathcal{C}_0^1 (ensemble des fonctions à support compact continûment dérivables), alors le problème de Cauchy pour le système de Vlasov-Poisson admet une unique solution dans \mathcal{C}_0^1 et on a les estimations*

$$\begin{aligned} Q(t) &= O(t^{\delta+51/11}), \quad \delta > 0 && \text{Pfaffelmauser} \\ Q(t) &= O(t^{\delta+33/17}), \quad \delta > 0 && \text{Schaeffer} \\ Q(t) &= O(t \ln^{11/14} t), && \text{Horst} \end{aligned}$$

Idée de la preuve. La première étape de la preuve consiste à obtenir des estimations *a priori*. D'abord on obtient une estimation sur le champ électrique en fonction de la densité de charge. Ensuite on obtient une estimation sur le gradient du champ électrique en fonction du gradient de la densité. Si on suppose que le support en vitesse reste borné en tout temps alors on montre que le champ électrique est borné et que le gradient de la densité est borné par le gradient de la fonction de distribution. Par conséquent le gradient du champ électrique est borné par le gradient de la fonction de distribution. En dérivant l'équation de Vlasov par rapport aux variables de l'espace des phases et en l'intégrant par rapport au temps on obtient une borne sur le gradient de la fonction de distribution en fonction d'une intégrale en temps d'une quantité dépendant du gradient du champ électrique et de la fonction de distribution. Cette dernière estimation et l'estimation sur le gradient du champ électrique en fonction du gradient de la fonction de distribution permet à partir d'une inégalité de Gronwall d'obtenir une borne de la fonction de distribution et du champ électrique dans \mathcal{C}^1 .

Ensuite on construit une suite de solutions à partir d'un problème de Vlasov-Poisson linéarisé. Les estimations *a priori* permettent d'obtenir des bornes uniforme sur le champ électrique et la fonction de distribution dans \mathcal{C}^1 . L'injection compacte de \mathcal{C}^1 dans \mathcal{C}^0 permet de montrer que la suite de solutions converge dans \mathcal{C}^0 . Pour passer à la limite dans le problème linéarisé il faut que la suite converge dans \mathcal{C}^1 . En utilisant les estimations *a priori* précédentes on peut montrer que la suite est de Cauchy dans \mathcal{C}^1 et donc on peut passer à la limite dans le problème régularisé. Il reste alors à montrer que le support en vitesse est borné pour tout temps fini. Le contrôle du support en vitesse est basé sur la borne de l'énergie, la théorie des caractéristiques et un découpage de l'espace des vitesses très technique. Pour plus de détails voir le résumé de F. Bouchut dans [41] ou le livre de R. Glassey [95]. ■

Enfin dans Lions-Perthame [140] il est prouvé que les moments d'ordre élevé en vitesse *i.e.* $\int \int f|v|^k dv dx$, de l'équation de Vlasov-Poisson sont propagés. Cette propriété permet sous des conditions de régularité plus faibles que celles de Pfaffelmoser (la preuve repose sur la finitude des moments d'ordre strictement supérieur à trois, $k > 3$, la construction de caractéristiques définies presque partout, et sur diverses estimations *a priori* pour le champ électrique) d'obtenir l'existence de solutions fortes (l'équation de Vlasov n'est plus satisfaite au sens classique car la régularité de la solution n'est pas suffisante, elle est satisfaite au sens des distributions) et de déduire de nouveaux résultats de régularité et d'unicité pour les solutions classiques et d'améliorer les résultats sur la régularité des solutions faibles.

En ce qui concerne le système de Vlasov-Maxwell dans $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$, Glassey et Strauss [95, 100] ont montré, comme dans le cas de Vlasov-Poisson, que l'existence d'une solution classique globale se réduit au contrôle des grandes vitesses. L'estimation du support en vitesse reste un problème ouvert pour le système de Vlasov-Maxwell posé dans $\mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$. Dans le cadre du système de Vlasov-Maxwell les problèmes 1-2 dimensionnel ($1x, 2v$) et 2-3 dimensionnel ($2x, 3v$) ont été résolus par Glassey, Strauss et Schaeffer, [98], [97], [100] et [101] dans le cas relativiste.

Wollman [208] traite le cas de solutions locales dans le cas classique, enfin Degond [62] et Asano [10] prouvent l'existence locale en temps et l'unicité de solutions fortes pour le système de Vlasov-Maxwell classique.

1.3 Résumé de la thèse

Cette thèse contient deux grandes parties. La première partie concerne l'étude mathématique de plusieurs méthodes de type semi-Lagrangien pour la résolution numérique du système de Vlasov-Poisson. La seconde partie traite de la construction de nouveaux schémas numériques de type semi-Lagrangien sur des maillages non structurés et adaptatifs de l'espace des phases.

1.3.1 Etude mathématique de quelques schémas de type semi-Lagrangien pour le système de Vlasov-Poisson

On considère le modèle de Vlasov-Poisson à une dimension (x, v) avec conditions aux limites périodiques en x . Le premier résultat concerne la convergence d'un schéma semi-Lagrangien sur un maillage non structuré, en l'occurrence une triangulation de l'espace des phases. L'intégration en temps est approchée par un splitting de Strang qui consiste à décomposer l'opérateur de transport issu de l'équation de Vlasov (le transport libre plus le transport dans un champ d'accélération) en plusieurs opérateurs de transport de dimension inférieure pour lesquels on sait intégrer exactement les courbes caractéristiques. La résolution dans l'espace des phases est assurée par une méthode semi-Lagrangienne conjuguée à un opérateur d'interpolation de Lagrange pour l'approximation spatiale. La résolution du champ électrique est obtenue en utilisant le noyau de Green correspondant à l'équation de Poisson. On montre la convergence de la fonction de distribution approchée $f_h(t, x, v)$ et du champ électrique approché $E_h(t, x)$ vers la solution du problème continu (f, E) . On a considéré plusieurs cas selon la régularité des données initiales. Dans le cas où $f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, l'ensemble des fonctions deux fois continûment différentiables périodiques en x et à support compact en v , on montre la convergence de la fonction de distribution et du champ électrique en norme L^∞ avec une vitesse de convergence en $O(h^{4/3})$. Dans le cas où f_0 appartient à $W^{1,\infty}$ et est à support compact on montre un résultat de convergence avec des estimations d'erreur en $O(h^{1-\varepsilon})$, où $0 < \varepsilon < 1$. Enfin on montre aussi la convergence de (f_h, E_h) vers (f, E) dans le cas où f_0 appartient à $W^{1,\infty}$ et lorsque le support en vitesse n'est plus un compact mais \mathbb{R} tout entier. La vitesse de convergence est en $O(h^{1-\varepsilon})$ avec $0 < \varepsilon < 1$. Les démonstrations reposent sur la théorie des caractéristiques et l'étude de la stabilité de l'opérateur d'interpolation. Toutes les estimations *a priori* peuvent être établies pour les opérateurs de Lagrange de degré quelconque définis sur un triangle. Cependant la seule estimation qui ne se généralise pas au degré quelconque est le résultat de stabilité concernant l'opérateur d'interpolation. En effet le phénomène de Runge qui traduit le fait que l'interpolant de Lagrange d'ordre élevé présente des oscillations artificielles au bord de l'élément fini (ici un élément de forme

triangulaire), dont l'amplitude croît avec le degré du polynôme, rend la stabilité L^∞ inaccessible. Aussi le cadre fonctionnel L^2 semble plus adapté à l'étude de la convergence des schémas d'ordre élevé. L'étude de schémas d'ordre élevé est très importante. En effet, contrairement aux équations hyperboliques non linéaires issues de la dynamique des gaz où on sait que la régularité des données initiales peut être perdue au cours du temps (apparition de chocs), pour les systèmes de Vlasov-Poisson ou Vlasov-Maxwell qui sont encore des équations hyperboliques non linéaires la théorie sur l'existence des solutions classiques montrent que si la donnée initiale est régulière et à support compact alors elle reste régulière et à support compact en tout temps. Malheureusement il n'existe pas d'outil mathématique adapté pour étudier la stabilité des opérateurs d'interpolation définis sur des maillages non structurés. Par contre dans le cas de grilles cartésiennes de l'espace des phases, l'analyse de Fourier (séries de Fourier) fournit un outil commode pour établir la stabilité des opérateurs d'interpolation d'ordre élevé. Aussi on a montré que dans le cas où on choisit un polynôme d'interpolation de Lagrange symétrique de degré m , $0 \leq m \leq 5$ la solution du schéma numérique converge vers la solution du problème continu en $O(h^m)$. La démonstration pour m quelconque est en cours de développement. Pour obtenir un ordre de convergence élevé il faut, bien entendu, que la solution du problème continu soit assez régulière, typiquement m fois continûment différentiable. On a étendu ce type de résultat de convergence dans les cas où on reconstruit la fonction de distribution avec des B-splines d'ordre élevé et certaines classes d'ondelettes ayant de bonnes propriétés de stabilité et d'approximation d'ordre élevé dans L^2 . Le résultat de stabilité dans le cas d'une base de polynômes de Lagrange symétriques indique que la stabilité L^2 de l'opérateur d'interpolation a lieu seulement dans une certaine région contenue dans l'élément fini et non pas sur tout l'élément. Aussi dans le cas de maillages triangulaires et plus généralement de n -simplexes on ne peut obtenir la stabilité L^2 qu'au prix de nombreuses difficultés techniques. En effet pour chaque triangle du maillage que l'on appellera triangle père, il faut déterminer un triangle fils dont la région de stabilité L^2 contient le triangle père qui est lui même contenu dans le triangle fils. Ensuite on définit l'opérateur d'interpolation sur le triangle père comme la restriction sur le triangle père de l'opérateur d'interpolation défini sur le triangle fils. Cependant s'il est possible de déterminer cette région de stabilité lorsque l'élément fini est un intervalle ou plus généralement un n -rectangle, dans le cas d'un triangle et d'un n -simplexe la preuve est très difficile car à ce jour il n'existe pas d'outil mathématique adapté à l'étude de la stabilité L^2 lorsque l'espace des phases est approché par des n -simplexes. Enfin on a montré la convergence d'une méthode semi-Lagrangienne avec propagation de gradients. Comme les schémas basés sur une interpolation de Lagrange (dans le cas d'une triangulation) ont un ordre de consistance élevé mais sont instables, pour obtenir des schémas d'ordre élevé et stables on utilise des schémas de type Hermite qui font intervenir non seulement la valeur de la fonction de distribution mais aussi son gradient. La connaissance des gradients fournit non seulement une reconstruction d'ordre élevé mais aussi stable car elle permet de mieux contrôler les oscillations de la fonction de distribution. Cependant il reste à trouver une équation sur le gradient de f pour pouvoir le propager

à l'instar de la fonction de distribution. Cette équation est obtenue en prenant le gradient de l'équation de Vlasov qui conduit à prendre aussi le gradient de l'équation de Poisson car la propagation de ∇f nécessite le gradient du champ de force accélérateur. On a obtenu un premier résultat pour ce type de méthode dans le cas où on approche l'espace des phases par une grille. L'étape la plus délicate reste la démonstration de la stabilité de l'opérateur d'interpolation en norme H^1 .

1.3.2 Méthodes numériques pour l'équation de Vlasov sur des maillages non structurés et adaptatifs de l'espace des phases à plusieurs dimensions.

Cette partie est consacré à la construction de schémas numériques pour la résolution de l'équation de Vlasov sur des maillage non structurés et des maillages adaptatifs de l'espace des phases. On s'est d'abord intéressé au modèle de Vlasov-Poisson à une dimension (x, v) avec conditions aux limites périodiques en x . Pour résoudre ce problème lorsque le domaine de l'espace des phases est approché par une triangulation on a construit des schémas de type semi-Lagrangien avec propagation de gradient. L'algorithme peut se résumer ainsi : on suppose que l'on connaît une approximation de la fonction de distribution au temps t^n . On évalue la fonction de distribution et ses dérivées partielles en espace et en vitesse à l'origine de la courbe caractéristique associée au transport libre se terminant en un point du maillage au temps $t^{n+1/2}$ avec un schéma d'interpolation de type Hermite. On obtient ainsi un approximation de f au temps $t^{n+1/2}$. Pour obtenir une approximation au $t^{n+1/2}$ du gradient de f on combine l'approximation des dérivées partielles en espace et en vitesse. Cette combinaison des dérivées partielles est obtenue en dérivant la solution transportée ou en résolvant par une technique de splitting l'équation de transport obtenue en prenant le gradient de l'équation de Vlasov. Ensuite on intègre en vitesse l'approximation de la fonction de distribution et de sa dérivée partielle par rapport à x au temps $t^{n+1/2}$, afin d'obtenir la densité de charge et le gradient de la densité de charge. On résout ensuite le problème de Poisson dont le terme source est la densité de charge pour obtenir une approximation du champ électrique au temps $t^{n+1/2}$. On résout un second problème de Poisson, obtenu en dérivant le problème de Poisson initial, et dont le terme source est le gradient de la densité. On obtient ainsi une approximation du gradient du champ électrique. Ensuite on évalue la fonction de distribution et ses dérivées partielles en espace et en vitesse à l'origine de la courbe caractéristique se terminant en un point du maillage au temps t^{n+1} et associée au transport accéléré, à partir du champ d'accélération et de son gradient (déterminé à l'étape précédente) avec un schéma d'interpolation de type Hermite. On obtient ainsi une approximation de f au temps t^{n+1} . Pour obtenir une approximation au temps t^{n+1} du gradient de f on combine l'approximation des dérivées partielles en espace et en vitesse. Enfin pour obtenir une approximation en temps en $O(\Delta t^2)$ on renouvelle l'étape de transport libre. Les schémas d'interpolation d'Hermite que l'on a considéré sont les suivants : HR (Hermite Réduit), HCTR (Hseigh-

Clough-Tocher Réduit), HCTC (Hsieh-Clough-Tocher Complet), NC0 (Nielson \mathcal{C}^0), NC1 (Nielson \mathcal{C}^1), GD (Ganev-Dimitrov). Afin d'obtenir un algorithme positif et conservatif on exprime la solution comme une combinaison locale linéaire d'une solution d'ordre faible (linéaire) et d'ordre élevé. Les coefficients des combinaisons linéaires locales sont alors solution d'un problème d'optimisation linéaire. On a d'abord validé la méthode sur des cas tests classiques de la physique des plasmas, à savoir l'amortissement Landau dans le régime linéaire, l'amortissement Landau dans le régime non linéaire et l'instabilité double faisceaux. On a mené une étude comparative des diverses reconstructions envisagées dans le cas conservatif ou non conservatif. Ensuite on a étendu la méthode au cas du modèle paraxial axisymétrique qui nous a conduit à construire un code parallèle à trois dimensions dans l'espace des phases (r, v_r, v_θ) . Ce code nous a permis d'étudier la propagation de faisceaux de particules chargées dans une chaîne de focalisation uniforme et de montrer l'existence de phénomènes physiques fins comme la formation du halo, couronne de particules de faible densité qui entoure le coeur du faisceau. Afin d'étudier des faisceaux plus réalistes obtenus dans des chaînes de focalisation périodique ou FODO (quadrupole magnétique ou quadrupole électrique) on a étendu la méthode au cas paraxial non axisymétrique et construit un code parallèle à quatre dimensions dans l'espace des phases (x, y, v_x, v_y) . En effet dans le cas d'un canal FODO, par exemple, la focalisation se fait par une succession de focalisations dans une direction et de focalisations dans la direction transverse et inversement. Par conséquent l'invariance par rotation de la fonction de distribution n'est plus respectée et le problème doit être étudié dans le plan transverse complet c'est-à-dire en (x, y, v_x, v_y) . La première étape a été de valider le code 4D dans le cas où la fonction initiale est invariante par rotation. Par ailleurs on a aussi reproduit le cas test de l'amortissement Landau dans le régime linéaire. Finalement on a mis en oeuvre une méthode adaptative basée sur une analyse multi-résolution par ondelettes. En effet, si les méthodes Euleriennes (sur un maillage de l'espace des phases) sont plus précises que les méthodes particulières, elles restent néanmoins peu efficaces dans les cas réalistes lorsqu'elles utilisent un maillage fixe. L'idée est de développer des méthodes numériques qui prennent en compte le plus grand nombre d'échelles physiques possible. L'utilisation des méthodes de raffinement adaptatif ou évolutif de maillage semble être une bonne stratégie pour suivre le développement des structures microscopiques et donner une bonne approximation des phénomènes physiques macroscopiques. Pour intégrer l'équation de Vlasov on a utilisé une méthode semi-Lagrangienne avec splitting d'opérateur et la fonction de distribution est décomposée sur une base d'ondelettes interpolantes (interpolettes). L'analyse multi-résolution par ondelettes est très bien adaptée car la structure du maillage et la représentation multi-échelle de la fonction de distribution sont directement reliées. On a validé cette méthode sur le cas test du cylindre fendu tournant et sur la propagation de faisceaux axisymétriques (Gaussiens et semi-Gaussiens) dans l'espace des phases $((r, v_r))$.

Chapitre 2

Analyse de convergence de quelques schémas de type semi-Lagrangien pour le système de Vlasov-Poisson

Sommaire

2.1	Introduction	24
2.2	Le problème continu	26
2.2.1	Définitions et notations	29
2.2.2	Existence, unicité et régularité des solutions du problème continu	31
2.3	Convergence d'un schéma semi-Lagrangien sur un maillage non structuré de l'espace des phases	33
2.3.1	Hypothèses de régularité pour le problème continu	33
2.3.2	Le problème discret	33
2.3.3	Le schéma numérique	35
2.3.4	Analyse de convergence	35
2.3.5	Autres résultats	45
2.4	Convergence de plusieurs classes de schémas semi-Lagrangiens d'ordre élevé	58
2.4.1	Hypothèses de régularité pour le problème continu	58
2.4.2	Le problème discret	58
2.4.3	Le schéma numérique	61
2.4.4	Définitions et notations	61
2.4.5	Analyse de convergence	63
2.4.6	Autres résultats	76
2.5	Convergence d'un schéma semi-Lagrangien avec propagation de gradients	95
2.5.1	Hypothèses de régularité pour le problème continu	95
2.5.2	Le problème discret	95
2.5.3	Le schéma numérique	101
2.5.4	Analyse de convergence	101
2.6	Conclusions	125

2.1 Introduction

La résolution numérique de l'équation de Vlasov est la plupart du temps réalisée par des méthodes Lagrangiennes comme les méthodes particulaires (Particles In Cell ou méthodes PIC). Ces méthodes consistent à approcher la fonction de distribution par une description particulaire c'est-à-dire par un nombre fini de macro-particules numériques (somme de dirac ou de dirac régularisés par une fonction cut-off qui sont pondérés par des poids représentant la densité de particule). Les trajectoires de ces particules sont calculées à partir des courbes caractéristiques données par l'équation de Vlasov. Les champs auto-consistants sont calculés via les équations de Poisson ou de Maxwell où les termes sources que sont la densité de charges et de courant sont obtenus en projetant les poids de la fonction de distribution sur un maillage de l'espace physique (pour plus de détails voir [38]). Bien que ces méthodes donnent des résultats satisfaisants avec un petit nombre de particules, il est bien connu que le bruit numérique inhérent aux méthodes particulaires devient trop important pour permettre une description précise des queues de distribution qui jouent un rôle essentiel dans la propagation des faisceaux de particules chargées. Pour remédier à ce problème, des méthodes Eulériennes qui consistent à discrétiser l'équation de Vlasov sur un maillage de l'espace des phases ont été proposées. Par exemple, les méthodes de volumes finis qui sont connues pour être des méthodes robustes et peu coûteuses ont été implémentées par Boris-Book (Flux Corrected Transport, FCT)[40]. Cependant les schémas de types volumes finis sont d'ordres faibles, dissipatifs et limités par des conditions CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Récemment Mineau (Flux Balanced Method, FBM) [147], Fijalkow [84] et Filbet-Sonnendrücker (Positive and Flux Conservative, PFC) [87] se sont affranchis de la condition CFL en introduisant les courbes caractéristiques dans les schémas de types volumes finis. D'autres méthodes Eulériennes comme les méthodes semi-Lagrangiennes peuvent être dans certains cas particuliers interpréter comme une version locale des méthodes Galerkin-characteristic [28, 29] qui ont été développées pour résoudre des problèmes de convection-diffusion [73, 166, 111]. Les méthodes semi-Lagrangiennes ont été introduites il y a une dizaine d'années pour les problèmes d'advection intervenant dans divers modèles météorologiques et de dynamique des fluides [196, 195, 176, 48] qui peuvent être formulés comme des systèmes de Liouville abstraits (ALS). Les schémas semi-Lagrangiens d'advection essaient de réunir à la fois les avantages des schémas d'advection Eulerien et Lagrangien, tout en essayant d'améliorer leurs inconvénients. Les schémas Eulerien d'advection ont de bonnes propriétés de résolution, mais la condition CFL, qui est une condition nécessaire pour obtenir la stabilité numérique, conduit souvent à des pas de temps très restrictif. D'un autre côté, les schémas d'advection Lagrangiens permettent d'utiliser des pas de temps plus larges, mais ont le désavantage qu'un ensemble de particules régulièrement réparties au départ évolue généralement vers une distribution de particules dont la répartition est fortement irrégulière (déformation Lagrangienne), ce qui implique que des caractéristiques important du flot Lagrangien peuvent ne pas être pas bien décrits. Les méthodes semi-Lagrangiennes utilisent un maillage Cartésien régulier et différents ensembles de

particules. A chaque pas de temps l'ensemble des particules est choisi de telle sorte qu'elles arrivent exactement aux points du maillage à la fin du pas de temps et sont advectées grâce aux courbes caractéristiques du système de Liouville abstrait. Plus précisément la méthode consiste à calculer directement la fonction de distribution du ALS sur une grille Cartésienne fixe de l'espace des phases alors que le calcul se fait en intégrant les courbes caractéristiques en arrière à chaque pas de temps en interpolant la valeur de la fonction de distribution au pied de la caractéristique. Dans certaines applications récentes des méthodes semi-Lagrangiennes au système de Vlasov-Maxwell relativiste [23, 24, 193], une méthode d'interpolation par splines cubique est utilisée, l'interpolation linéaire étant trop diffuse. Les méthodes semi-Lagrangiennes ont été implémentées de manière performantes en utilisant des calculateurs parallèles [194] et donnent de grands espoirs pour déterminer de manière précises les structures de la fonction de distributions dans des régions où la densité est faible.

On a étendu cette méthode sur des maillages non structurés avec différents opérateurs d'interpolation locaux et d'ordre élevé avec la possibilité de conserver la positivité et la masse en introduisant une combinaison linéaire d'une solution d'ordre faible et d'ordre élevé tempérée par un coefficient limiteur. Ici on montrera la convergence de la méthode pour l'opérateur d'interpolation le plus simple à savoir l'opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre un. D'autres opérateurs d'interpolation sur des triangles, plus compliqués qui nécessitent la connaissance de la fonction de distribution et de son gradient ont été implémentés avec succès (cf chapitre 3). Cependant il n'est pas aisé d'obtenir une preuve mathématique de la convergence de ces méthodes car on transporte non seulement la fonction de distribution mais aussi son gradient. L'étape la plus difficile est l'obtention d'un résultat de stabilité en norme $W^{1,p}$ pour l'opérateur d'interpolation. En particulier la stabilité H^1 est difficile à obtenir car l'outil mathématique qu'est l'analyse de Fourier est très bien adapté au cas des grilles mais il ne l'est pas lorsque le domaine de calcul est approché par une triangulation. Il reste à construire un outil adapté au cas des maillages non structurés.

On montrera la convergence de plusieurs classes de schémas semi-Lagrangiens d'ordre élevé lorsque le domaine de l'espace des phases est approché par une grille. La première classe de schémas est obtenue en considérant l'interpolation de Lagrange symétrique de degré élevé. Ensuite on considèrera des reconstructions de type B-splines d'ordre élevé et des reconstructions à partir d'ondelettes ayant de bonnes propriétés d'approximation et de stabilité L^2 . Finalement on montrera la convergence d'un schéma de type semi-Lagrangien avec propagation de gradient sur une grille de l'espace des phases. La stabilité H^1 est obtenue en utilisant l'analyse de Fourier.

Plusieurs auteurs se sont penchés sur la convergence de méthodes numériques pour le système de Vlasov-Poisson ou de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck. Un des premiers travaux sur la convergence des méthodes particulières en une dimension est du à H. Neunzert, J. Wick [158]. P.-A. Raviart et G.-H. Cottet [57] ont présenté une analyse mathématique d'une méthode particulière pour résoudre le système de Vlasov-Poisson en une dimension. De nombreux auteurs dont H.D. Victory, J. Havlak et S. Wollman ont établi la convergence de méthodes particulières

pour le système de Vlasov-Poisson multi-dimensionnel [201, 202, 203, 209, 210]. Ils ont aussi montré la convergence de méthodes particulières déterministes et probabilistes pour le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck [204, 205]. J. Schaeffer [185] a montré la convergence d'un schéma de différences finies pour le système de Vlasov-Poisson-Fokker-Planck à une dimension sur une grille de l'espace des phases. L'analyse de convergence d'une méthode particulière pour le système de Vlasov-Maxwell relativiste a été réalisé par R. Glassey et J. Schaeffer [99]. Enfin F. Filbet [85] à montré la convergence d'un schéma de volumes finis pour le système de Vlasov-Poisson à une dimension sur une grille de l'espace des phases.

2.2 Le problème continu

On considère un plasma non collisionnel de particules chargées (électrons et ions) à une dimension. On prend en compte le champ électrostatique auto-consistant et on néglige le champ magnétique. Comme l'inertie des ions est très grande par rapport à celle des électrons on considère que les ions forment un fond neutralisant uniforme.

On désigne par $f(t, x, v) \geq 0$ la fonction de distribution des électrons dans l'espace des phases (avec une masse, une charge et une permittivité normalisées à un) et par $E(t, x)$ le champ électrique auto-consistant. Le système de Vlasov-Poisson s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + E(t, x) \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{dE}{dx}(t, x) = \rho(t, x). \quad (2.2)$$

où la densité de charge $\rho = \rho(t, x)$ est définie par

$$\rho(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x, v) dv - 1.$$

On considère un plasma périodique de période L . Alors dans (2.1) et (2.2) on a $x \in [0, L]$, $v \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, et les fonctions f et E satisfont les conditions aux limites périodiques

$$f(t, 0, v) = f(t, L, v) \quad v \in \mathbb{R} \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

$$E(t, 0) = E(t, L) \quad t \geq 0. \quad (2.4)$$

Pour (2.2), la condition (2.4) est équivalente à

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x, v) dv dx = 1. \quad (2.5)$$

Cette condition peut se récrire comme

$$\int_0^L \rho(t, x) dx = 0,$$

et signifie que le plasma est globalement neutre. Afin d'avoir un problème bien posé on ajoute aux équations (2.1)-(2.4) la condition suivante :

$$\int_0^L E(t, x) dx = 0, \quad t \geq 0 \quad (2.6)$$

qui signifie que le champ est à moyenne nulle et la condition initiale

$$f(0, x, v) = f_0(x, v), \quad x \in [0, L], \quad v \in \mathbb{R} \quad (2.7)$$

On peut donner une formulation équivalente et plus appropriée du système de Vlasov-Poisson avec conditions aux limites périodiques (2.1)-(2.4), (2.6),(2.7) en introduisant le champ électrostatique $\phi = \phi(t, x)$ tel que

$$E(t, x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}(t, x). \quad (2.8)$$

La condition (2.6) implique que

$$\phi(t, 0) = \phi(t, L).$$

Puisque ϕ est connu à une constante additive près, les équations (2.2) et (2.6) peuvent être remplacées par

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x, v) dv - 1, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

$$\phi(t, 0) = \phi(t, L), \quad t \geq 0. \quad (2.10)$$

Si on désigne par $G = G(x, y)$ la fonction de Green associée à notre problème, c'est-à-dire pour $y \in]0, L[$, $G(\cdot, y)$ est solution de

$$-\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x, y) = \delta(x - y) \quad x \in [0, L]$$

$$G(0, y) = G(L, y)$$

où δ est la distribution de Dirac. Alors G est donné par

$$G(x, y) = \begin{cases} x(1 - \frac{y}{L}) & 0 \leq x \leq y \\ y(1 - \frac{x}{L}) & y \leq x \leq L. \end{cases}$$

Puisque ϕ , solution des équations (2.9)-(2.10), est donnée par

$$\phi(t, x) = \int_0^L G(x, y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y, v) dv - 1 \right) dy$$

on obtient

$$E(t, x) = \int_0^L K(x, y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, y, v) dv - 1 \right) dy \quad (2.11)$$

où

$$K(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} (\frac{y}{L} - 1) & 0 \leq x < y \\ \frac{y}{L} & y < x \leq L. \end{cases} \quad (2.12)$$

Aussi, une formulation équivalente du problème est de trouver f et E vérifiant les équations (2.1) et (2.11), avec les conditions aux limites (2.3), (2.4) (ou (2.5)) et la condition initiale (2.7). Par ailleurs si on prend la dérivée de (2.12) au sens des distributions on obtient

$$\frac{\partial K}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{L} - \delta(x - y). \quad (2.13)$$

D'un autre côté, si on intègre (2.1) par rapport à v on obtient l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

où $j = j(t, x)$ est le premier moment de f , c'est-à-dire la densité de courant

$$j(t, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} v f(t, x, v) dv.$$

Grâce à l'équation (2.14), la dérivée de (2.11) par rapport à t , donne

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t, x) = \int_0^L K(x, y) \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, y) dy = - \int_0^L K(x, y) \frac{\partial j}{\partial y}(t, y) dy,$$

et finalement grâce à (2.13) on obtient

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t, x) = \frac{1}{L} \int_0^L j(t, x) dx - j(t, x). \quad (2.15)$$

Les équations (2.1), (2.2) et (2.15) forment le système d'équations de Vlasov-Maxwell avec un champ magnétique nul.

En outre, si le champ électrique E est assez régulier (continu et lipschitzien en espace) on peut résoudre les équations (2.1), (2.3) et (2.7) dans un sens classique comme il suit (pour l'existence, l'unicité et la régularité des solutions du système différentiel suivant on invite le lecteur à lire les références [41] et [174]). On considère le système différentiel du premier ordre

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt}(t; s, x, v) &= V(t; s, x, v), \\ \frac{dV}{dt}(t; s, x, v) &= E(t, X(t; s, x, v)) \end{aligned} \quad (2.16)$$

et on désigne par $t \rightarrow (X(t; s, x, v), V(t; s, x, v))$ les courbes caractéristiques qui sont solutions de (2.16) avec la condition initiale

$$X(s; s, x, v) = x \quad V(s; s, x, v) = v. \quad (2.17)$$

Alors la solution du problème (2.1), (2.7) est donnée par

$$f(t, x, v) = f_0(X(0; t, x, v), V(0; t, x, v)), \quad x, v \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (2.18)$$

On remarque que la périodicité en x de $f_0(x, v)$, et $E(t, x)$ implique la périodicité en x de $f(t, x, v)$. De plus, comme

$$\left| \frac{\partial(X, V)}{\partial(x, v)} \right| = 1,$$

on obtient

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, x, v) dv dx = \frac{1}{L} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, v) dv dx = 1.$$

Ainsi, suivant les considérations précédentes, une forme équivalente du problème de Vlasov-Poisson avec conditions aux limites périodiques est de trouver le couple (f, E) , assez régulier, périodique par rapport à x , de période L , et vérifiant les équations (2.11), (2.16), (2.17) et (2.18).

2.2.1 Définitions et notations

Maintenant on introduit des notations classiques. Si \mathbb{N} représente l'ensemble des entiers non négatifs, un multi-entier α est un n -tuple d'entiers positifs $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, n$. On a alors les définitions suivantes

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

$$D^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}.$$

Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^n . Pour tout entier non négatif m soit $\mathcal{C}^m(\Omega)$ l'espace vectoriel contenant les fonctions continues ϕ dont les dérivées partielles $D^\alpha \phi$ d'ordre $|\alpha| \leq m$ sont continues sur Ω .

On définit $\mathcal{C}_b^m(\Omega)$, l'espace vectoriel de toutes les fonctions $\phi \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ pour lesquelles $D^\alpha \phi$ est borné et uniformément continue sur Ω pour $0 \leq |\alpha| \leq m$. $\mathcal{C}_b^m(\Omega)$ est un espace de Banach doté de la norme

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}_b^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{z \in \Omega} |D^\alpha \phi(z)|.$$

On définit $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ comme le sous-espace de $\mathcal{C}_b^m(\Omega)$ contenant les fonctions ϕ pour lesquelles, avec $0 \leq |\alpha| \leq m$, $D^\alpha \phi$ à un support compact dans Ω .

Si $0 < \lambda \leq 1$, on définit $\mathcal{C}^{m, \lambda}(\Omega)$ comme le sous-espace de $\mathcal{C}_b^m(\Omega)$ contenant les fonctions ϕ pour lesquelles, avec $0 \leq |\alpha| \leq m$, $D^\alpha \phi$ satisfait sur Ω une condition d' Hölder d'exposant λ , c'est-à-dire, qu'il existe une constante K telle que

$$|D^\alpha \phi(x) - D^\alpha \phi(y)| \leq K|x - y|^\lambda, \quad x, y \in \Omega.$$

$\mathcal{C}^{m, \lambda}(\Omega)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}^{m, \lambda}(\Omega)} = \|\phi\|_{\mathcal{C}_b^m(\Omega)} + \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha \phi(x) - D^\alpha \phi(y)|}{|x - y|^\lambda}.$$

Pour toute fonction $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ on définit

$$\text{Lip}(\phi) = \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|}.$$

$$\text{Lip}(\Omega) = \{\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{Lip}(\phi) < \infty\}$$

est un espace de Banach muni de la norme

$$\|\phi\|_{\text{Lip}(\Omega)} = \|\phi\|_{\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)}.$$

On définit $\mathcal{C}_{b, \text{per}_{x_i}}^m(\Omega_{x_i} \times \Omega_{n-1})$ comme le sous-espace $\mathcal{C}_b^m(\Omega)$ contenant les fonctions ϕ qui sont périodiques par rapport à la variable x_i et bornées par rapport aux autres variables. On définit aussi $\mathcal{C}_{c, \text{per}_{x_i}}^m(\Omega_{x_i} \times \Omega_{n-1})$ comme le sous-espace de $\mathcal{C}_c^m(\Omega)$ contenant les fonctions ϕ qui sont périodiques par rapport à la variable x_i et à support compact par rapport aux autres variables.

On désigne par $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, l'espace de toutes les classes d'équivalence des fonctions à valeurs réelles et Lebesgue-mesurables telles que $\int_{\Omega} |\phi|^p dx < +\infty$.

Soit $L^p(\Omega)$ l'espace de Banach doté de la norme

$$\|\phi\|_{L^p(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} |\phi|^p d\Omega \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{z \in \Omega} \text{ess } |\phi(z)|.$$

On notera $L_c^p(\Omega)$ l'espace des fonctions de $L^p(\Omega)$ à support compact dans Ω . On désigne par $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace de Sobolev contenant les fonctions ϕ qui, avec ses dérivées partielles $D^\alpha \phi$ prises au sens des distributions et d'ordre $|\alpha| \leq m$ appartiennent à l'espace $L^p(\Omega)$. Si on définit la semi-norme comme

$$|\phi|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{|\alpha|=k} |D^\alpha \phi|_{L^p(\Omega)}^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$|\phi|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha|=k} \sup_{z \in \Omega} \text{ess } |D^\alpha \phi(z)|$$

on équipe l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ de la norme

$$\|\phi\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left\{ \sum_{k=0}^m |\phi|_{W^{k,p}(\Omega)}^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\phi\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \leq k \leq m} |\phi|_{W^{k,\infty}(\Omega)}$$

On utilisera la notation $H^m = W^{m,2}$. Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|_X$. On notera $W_c^{m,p}(\Omega)$ l'espace des fonctions de $W^{m,p}(\Omega)$ à support compact. On désigne par $\mathcal{C}^m(0, T; X)$, $0 < T < +\infty$, l'espace des fonctions m

fois continument différentiables de $(0, T)$ dans X et par $L^p(0, T; X)$ l'espace des fonctions fortement mesurables $\phi : t \rightarrow \phi(t)$ de $(0, T)$ dans X . Alors on définit les normes,

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}(0,T;X)} = \sup_{t \in [0,T]} \|\phi(t)\|_X$$

$$\|\phi\|_{\mathcal{C}^m(0,T;X)} = \sum_{k=0}^m \left\| \frac{d^k \phi}{dt^k} \right\|_{\mathcal{C}(0,T;X)}.$$

$$\|\phi\|_{L^p(0,T;X)} = \left\{ \int_0^T \|\phi(t)\|_X^p dt \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\phi\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{0 < t < T} \text{ess} \|\phi(t)\|_X.$$

On introduit aussi l'espace $l^\infty(0, T; X)$ défini par

$$l^\infty(0, T; X) := \left\{ f : \{t^0, \dots, t^M\} \rightarrow X \mid \|f\|_{l^\infty(0,T;X)} = \max_{1 \leq n \leq M} \|f(t^n)\|_X < \infty \right\}$$

où X désigne l'espace fonctionnel (dans notre contexte X sera souvent L^p , $p \in [1, \infty]$), $t^i = i\Delta t$ et $\Delta t = T/M$. Finalement on définit les espaces à poids $L_{w,\lambda}^\infty(Q)$

$$L_{w,\lambda}^\infty(Q) = \{f \in L^\infty(Q) \mid (1 + |v|)^\lambda f \in L^\infty(Q), \lambda > 0\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} = \|(1 + |v|)^\lambda f\|_{L^\infty(Q)}$$

et $W_{w,\lambda}^{1,\infty}(Q)$

$$W_{w,\lambda}^{1,\infty}(Q) = \{f \in W^{1,\infty}(Q) \mid D^\alpha f \in L_{w,\lambda}^\infty(Q), |\alpha| \leq 1\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{W_{w,\lambda}^{1,\infty}(Q)} = \max_{0 \leq k \leq 1} \|f\|_{W_{w,\lambda}^{k,\infty}(Q)}$$

2.2.2 Existence, unicité et régularité des solutions du problème continu

Dans cette section on rappelle deux théorèmes sur l'existence des solutions classiques du système d'équations de Vlasov-Poisson. Les théorèmes suivants donnent l'existence, l'unicité et la régularité des solutions classiques globales en temps du système de Vlasov-Poisson périodique à une dimension.

Théorème 2 *On suppose $f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, positive, périodique par rapport à la variable x de période L , et $Q(0) \leq R$ avec $R > 0$ et $Q(t)$ défini comme suit*

$$Q(t) = 1 + \sup \{ |v| : \exists x \in [0, L], \tau \in [0, t] | f(\tau, x, v) \neq 0 \},$$

et

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, v) dv dx = 1,$$

alors le système de Vlasov-Poisson périodique a une unique solution classique (f, E) périodique en x , de période L , pour tout temps t dans $[0, T]$, tel que

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{C}_b^1(0, T; \mathcal{C}_{c,per_x}^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)) \\ E &\in \mathcal{C}_b^1(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^1(\mathbb{R})), \\ Q(T) &\leq CT \end{aligned}$$

En outre si $f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^m(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, alors pour tout temps fini T , $(f, E) \in \mathcal{C}_b^m(0, T; \mathcal{C}_{c,per_x}^m(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)) \times \mathcal{C}_b^m(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^m(\mathbb{R}))$.

Preuve. On n'écrira pas la preuve car c'est une adaptation directe de la preuve donnée par Schaeffer [185]. On renvoie le lecteur aux références [54, 161, 116, 117, 95, 118, 200, 140] ■

Une variation du théorème précédent est de considérer non plus des solutions à support compact (qui est réaliste d'un point de vue physique) mais des solutions à décroissance rapide.

Théorème 3 On suppose $f_0 \in C_{b,per_x}^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, positive, périodique par rapport x de période L ,

$$0 \leq f_0 \leq c(1 + |v|)^{-\lambda} \quad \lambda > 1, \quad c > 0, \quad x, v \in \mathbb{R},$$

et

$$\frac{1}{L} \int_0^L \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(x, v) dv dx = 1,$$

alors le système de Vlasov-Poisson périodique a une unique solution classique (f, E) périodique en x , de période L , pour tout temps t dans $[0, T]$, tel que

$$\begin{aligned} f &\in C_b^1(0, T; C_{b,per_x}^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)), \\ E &\in C_b^1(0, T; C_{b,per_x}^1(\mathbb{R})), \end{aligned}$$

$$0 \leq f \leq c(1 + |v|)^{-\lambda} \quad \lambda > 1, \quad c > 0, \quad x, v \in \mathbb{R}. \quad (2.19)$$

De plus si on suppose $f_0 \in C_{b,per_x}^m(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, alors $(f, E) \in C_b^1(0, T; C_{b,per_x}^m(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)) \times C_b^m(0, T; C_{b,per_x}^m(\mathbb{R}))$, pour tout temps fini T .

Preuve. On n'écrira pas la preuve car c'est aussi une adaptation directe de la preuve faite par Ukai-Okabe dans [200]. ■

2.3 Convergence d'un schéma semi-Lagrangien sur un maillage non structuré de l'espace des phases

Dans cette section on donne un résultat de convergence pour un schéma semi-Lagrangien où le domaine de l'espace des phases à deux dimensions (x, v) est approché par une triangulation.

2.3.1 Hypothèses de régularité pour le problème continu

Pour notre propos, on supposera d'abord que $f_0(x, v)$ vérifie les hypothèses de régularité suivantes

$$f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$$

Alors, comme il est démontré dans Glassey [95], si f_0 est régulière et à support compact en vitesse alors la solution du système de Vlasov-Poisson reste encore régulière et à support compact pour tout temps. Le théorème 2 donne l'existence et l'unicité du couple solution (f, E) tel que

$$f \in \mathcal{C}_b^2(0, T; \mathcal{C}_{c,per_x}^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)) \quad (2.20)$$

$$E \in \mathcal{C}_b^2(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^2(\mathbb{R})). \quad (2.21)$$

On montrera plus loin que l'on peut encore avoir un résultat de convergence sous des hypothèses de régularité plus faibles

2.3.2 Le problème discret

2.3.2.1 Espaces d'approximation et opérateurs d'interpolation

Soit $Q = [0, L] \times \mathbb{R}$, $\Omega = [0, L] \times [-R, R]$ avec $R > 0$, et \mathcal{T}_h une triangulation de Q . Avant d'aller plus loin on impose certaines hypothèses de régularité sur la triangulation \mathcal{T}_h :

(H1) La triangulation \mathcal{T}_h est régulière, c'est-à-dire qu'il existe une constante σ telle que

$$\frac{h_T}{\rho_T} \leq \sigma \quad \forall T \in \mathcal{T}_h,$$

et la quantité $h = \max_{\{T \in \mathcal{T}_h\}} h_T$ tend vers zéro, où h_T et ρ_T désignent respectivement le diamètre extérieur et intérieur d'un élément fini T .

(H2) Pour tout élément fini (T, P_T, Σ_T) , $T \in \mathcal{T}_h$, est affine équivalent à un seul élément fini de référence $(\hat{T}, \hat{P}, \hat{\Sigma})$ (cf [49]).

Soit P_m l'espace des polynômes de Lagrange de degré inférieur ou égal à m , et X_h , l'espace défini par

$$X_h = \{g \in W^{1,\infty} \cap W^{1,p}(Q) \mid g|_T \in P_m, \forall T \in \mathcal{T}_h\}.$$

Soit π_h un opérateur linéaire continu d'interpolation de $W^{m+1,\infty} \cap W^{m+1,p}(Q)$, $1 \leq p < \infty$, dans X_h . L'estimation d'erreur d'interpolation dans les espaces de Sobolev (cf [49]) donne

$$\|f - \pi_h f\|_{W^{k,q}(Q)} \leq Ch^{m+1-k} \|f\|_{W^{m+1,q}(Q)}, \quad \forall f \in W^{m+1,\infty} \cap W^{m+1,q}(Q), \quad (2.22)$$

avec $k \in \{0, 1\}$ et $q \in \{p, \infty\}$.

L'espace X_h est caractérisé par ses fonctions de base que l'on désigne par $\{\psi_k\}$.

2.3.2.2 Opérateurs de transport

Maintenant on introduit des opérateurs de transport. Soient \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 les opérateurs définis comme suit

$$\mathcal{T}_1 g(t, x, v) = g(t, x - v\Delta t/2, v), \quad \forall g \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$$

$$\mathcal{T}_2 g(t, x, v) = g(t, x, v - \Delta t \tilde{E}), \quad \forall g \in L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$$

où $\tilde{E}(t, x)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}}{dx}(t, x) = \int_v \mathcal{T}_1 g(t, x, v) dv - 1 \\ \int_0^L \tilde{E}(t, x) dx = 0. \end{cases} \quad (2.23)$$

Soit $\tilde{\mathcal{T}}_1$ l'opérateur de transport défini comme suit

$$\tilde{\mathcal{T}}_1 g(t, x, v) = \pi_h g(t, x - v\Delta t/2, v),$$

où

$$\pi_h g(t, x, v) = \sum_k g(t, x_k, v_k) \psi_k(x, v),$$

et $\tilde{\mathcal{T}}_2$ défini comme

$$\tilde{\mathcal{T}}_2 g(t, x, v) = \pi_h g(t, x, v - \Delta t \tilde{E}(t, x)).$$

Finalement on introduit

$$\tilde{\mathcal{T}}_2^* g(t, x, v) = \pi_h g(t, x, v - \Delta t E_h(t, x)),$$

où $E_h(t, x)$ est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \frac{dE_h}{dx}(t, x) = \int_v \tilde{\mathcal{T}}_1 g(t, x, v) dv - 1 \\ \int_0^L E_h(t, x) dx = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Notons que l'équation (2.11) implique que $\tilde{E}(t, x)$ et $E_h(t, x)$ sont respectivement donnés par

$$\tilde{E}(t, x) = \int_0^L K(x, y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_1 g(t, y, v) dv - 1 \right) dy$$

et

$$E_h(t, x) = \int_0^L K(x, y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{T}}_1 g(t, y, v) dv - 1 \right) dy.$$

2.3.3 Le schéma numérique

On suppose que on connait la fonction de distribution approchée $f_h(t^n)$. Alors le schéma numérique qui permet de passer de l'instant t^n à l'instant t^{n+1} et par suite de calculer la nouvelle fonction de distribution approchée $f_h(t^{n+1})$ peut être décrit en quatre étapes :

- (A1) On évalue la fonction de distribution au temps t^n à l'extrémité initiale de la caractéristique associée au transport libre se terminant au point (x, v) au temps $t^{n+1/2}$ en utilisant un opérateur d'interpolation de Lagrange. Cette action est décrite par l'opérateur de transport $\tilde{\mathcal{T}}_1$.
- (A2) Le résultat fourni par l'étape (A1) est intégré par rapport à la variable de vitesse afin de fournir une approximation pour la densité de charge au temps $t^{n+1/2}$, qui est ensuite substituée au second membre de l'équation de Poisson (2.24) et de calculer une approximation du champ électrique au temps $t^{n+1/2}$.
- (A3) Le résultat obtenu dans l'étape (A1) est évalué à l'extrémité initiale de la caractéristique en vitesse se terminant au point (x, v) au temps t^{n+1} à partir du champ d'accélération calculé durant l'étape (A2) en utilisant un opérateur d'interpolation de Lagrange. Cette action est décrite par l'opérateur de transport $\tilde{\mathcal{T}}_2^*$.
- (A4) Entre l'instant $t^{n+1/2}$ et t^{n+1} , on applique de nouveau l'étape (A1) au résultat obtenu grâce à l'étape (A3). Cette action est décrite par l'opérateur de transport $\tilde{\mathcal{T}}_1$. Finalement on obtient la fonction de distribution approchée $f_h(t^{n+1})$ au temps t^{n+1} qui constitue une nouvelle donnée initiale pour l'algorithme (A1)-(A4).

En utilisant les opérateurs de transport décrits dans la section précédente 2.3.2.2 le schéma numérique peut s'écrire comme suit

$$f_h(t^{n+1}, x, v) = \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n, x, v),$$

$$f_h(0, x, v) = \pi_h f_0(x, v) \text{ une discrétisation de } f_0 \text{ donnée initiale,}$$

$$f_h(t^n, x + L, v) = f_h(t^n, x, v), \quad \forall |v| \leq Q(T)$$

condition aux limites en x et

$$f_h(t^n, x, v) = 0, \quad \forall |v| > Q(T), \quad \forall x \in [0, L]$$

condition aux limites en v .

2.3.4 Analyse de convergence

2.3.4.1 Théorème principal

On écrit ici le théorème de convergence.

Théorème 4 *Supposons $f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, positive, périodique par rapport à la variable x de période L , à support compact en vitesse, alors la solution numérique du système de Vlasov-Poisson (f_h, E_h) , donnée par le schéma exposé dans*

la section 2.3.3 converge vers la solution (f, E) du système de Vlasov-Poisson périodique et il existe une constante $C = C(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))})$ indépendante de Δt et h telle que

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \leq C(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))}) \left(\Delta t^2 + h^2 + \frac{h^2}{\Delta t} \right)$$

et

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))}) \left(\Delta t^2 + h^2 + \frac{h^2}{\Delta t} \right)$$

Remarque 5 *Le taux de convergence est légèrement supérieur à l'ordre un. En effet si on fait le choix $\Delta t = h^{2/3}$, alors l'estimation d'erreur implique une vitesse de convergence en $h^{4/3}$.*

2.3.4.2 Idée de la preuve

On veut évaluer l'erreur globale au temps t^{n+1}

$$e^{n+1} = \|f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v)\|_{L^\infty(Q)}.$$

Pour cela on décompose $f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v)$ comme il suit

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v) &= f(t^{n+1}, x, v) - \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) \\ &\quad + \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n, x, v) - f_h(t^n, x, v)). \end{aligned}$$

Afin d'estimer e^{n+1} on estimera les quatre termes de droite de l'équation précédente. L'ensemble de la preuve qui consiste à obtenir ces estimations sont décrites dans les paragraphes suivants.

2.3.4.3 Estimations *a priori*

On commence par le lemme suivant qui donne une estimation de l'erreur de discrétisation en temps

Lemme 6 *On suppose que $f \in \mathcal{C}_b^2(0, T; \mathcal{C}_{c,per_x}^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$, alors il existe une constante C telle que*

$$\|f(t^{n+1}) - \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n)\|_{L^\infty(Q)} \leq C(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))}) \Delta t^3$$

Preuve. Comme f est conservée le long des caractéristiques

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, x, v) &= f(t^{n+1}, X(t^{n+1}; t^{n+1}, x, v), V(t^{n+1}; t^{n+1}, x, v)) \\ &= f(t^n, X(t^n; t^{n+1}, x, v), V(t^n; t^{n+1}, x, v)) \\ &= f(t^n, X(t^n), V(t^n)), \end{aligned}$$

où $X(t^n) = X(t^n; t^{n+1}, x, v)$ et $V(t^n) = V(t^n; t^{n+1}, x, v)$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) &= \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) \\
&= \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x - v\Delta t/2, v) \\
&= \mathcal{T}_1 f(t^n, x - v\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{2}\tilde{E}(t^{n+1/2}, x), v - \Delta t\tilde{E}(t^{n+1/2}, x)) \\
&= f(t^n, x - v\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\tilde{E}(t^{n+1/2}, x - v\Delta t/2), v - \Delta t\tilde{E}(t^{n+1/2}, x - v\Delta t/2)) \\
&= f(t^n, \tilde{X}(t^n; t^{n+1}, x, v), \tilde{V}(t^n; t^{n+1}, x, v)) \\
&= f(t^n, \tilde{X}(t^n), \tilde{V}(t^n))
\end{aligned}$$

où

$$\tilde{X}(t^n) = \tilde{X}(t^n; t^{n+1}, x, v) = x - v\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\tilde{E}(t^{n+1/2}, x - v\Delta t/2)$$

et

$$\tilde{V}(t^n) = \tilde{V}(t^n; t^{n+1}, x, v) = v - \Delta t\tilde{E}(t^{n+1/2}, x - v\Delta t/2).$$

Afin de justifier le développement de Taylor on rappelle l'hypothèse de régularité (2.21) à savoir $E \in \mathcal{C}_b^2(0, T; \mathcal{C}_{b, per_x}^2(\mathbb{R}))$. On note que \tilde{E} a la même régularité que E , puisque les termes sources dans les équations de Poisson (2.23) et (2.2) ont la même régularité.

Un développement de Taylor sur les caractéristiques donne alors

$$\begin{aligned}
X(t^{n+1/2}) - (x - v\Delta t/2) &= X(t^{n+1/2}) - (X(t^{n+1}) - V(t^{n+1})\frac{\Delta t}{2}) \\
&= X(t^{n+1/2}) - \left(X(t^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2}\dot{X}(t^{n+1}) \right) \quad (2.25) \\
&= O(\Delta t^2).
\end{aligned}$$

Comme $f \in \mathcal{C}_b^2(0, T; \mathcal{C}_{c, per_x}^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(t^{n+1/2}, x, v) - f(t^n, x - v\Delta t/2, v)}{\Delta t/2} &= \partial_t f(t^{n+1/2}, x, v) + v\partial_x f(t^{n+1/2}, x, v) + O(\Delta t) \\
&= -E(t^{n+1/2}, x)\partial_v f(t^{n+1/2}, x, v) + O(\Delta t). \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Alors en utilisant (2.11) et (2.26) on obtient

$$\begin{aligned}
E(t^{n+1/2}, x) - \tilde{E}(t^{n+1/2}, x) &= \int_0^L K(x, y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t^{n+1/2}, y, v) - f(t^n, y - v\Delta t/2, v)] dv \right) dy \\
&\leq C (\|f\|_{\mathcal{C}^2(0, T; W^{2, \infty}(Q))}) \Delta t^2. \quad (2.27)
\end{aligned}$$

A partir de (2.25) et (2.27) on obtient

$$\begin{aligned}
V(t^n) - \tilde{V}(t^n) &= V(t^n) - \left(V(t^{n+1}) - \Delta t \tilde{E}(t^{n+1/2}, X(t^{n+1}) - V(t^{n+1}) \frac{\Delta t}{2}) \right) \\
&= V(t^n) - \left(V(t^{n+1}) - \Delta t \tilde{E}(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^2)) \right) \\
&= V(t^n) - \left(V(t^{n+1}) - \Delta t E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^2)) \right) \\
&\quad + \Delta t \left(\tilde{E}(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^2)) - E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^2)) \right) \\
&= V(t^n) - \left(V(t^{n+1}) - \Delta t E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2})) \right) + O(\Delta t^3) \\
&= V(t^n) - V(t^{n+1}) + \Delta t \dot{V}(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^3) \\
&\leq C (\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))}) \Delta t^3
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
X(t^n) - \tilde{X}(t^n) &= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t V(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} \tilde{E}(t^{n+1/2}, X(t^{n+1}) - V(t^{n+1}) \frac{\Delta t}{2}) \right) \\
&= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t V(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} \tilde{E}(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^2)) \right) \\
&= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t V(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^2)) \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t^2}{2} \left(\tilde{E}(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^2)) - E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^2)) \right) \\
&= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t V(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2})) \right) + O(\Delta t^4) \\
&= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t \dot{X}(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}(t^{n+1/2}) \right) + O(\Delta t^4) \\
&= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t \dot{X}(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}(t^{n+1}) \right) + O(\Delta t^3) \\
&\leq C (\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))}) \Delta t^3.
\end{aligned}$$

Finalemment on en déduit que

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) &= f(t^n, X(t^n) + O(\Delta t^3), V(t^n) + O(\Delta t^3)) \\
&= f(t^n, X(t^n), V(t^n)) + \nabla f(t^n, X(t^n), V(t^n)) \cdot O(\Delta t^3) \\
&= f(t^{n+1}, X(t^{n+1}), V(t^{n+1})) + \nabla f(t^n, X(t^n), V(t^n)) \cdot O(\Delta t^3) \\
&= f(t^{n+1}, x, v) + \nabla f(t^n, X(t^n), V(t^n)) \cdot O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

et

$$\|f(t^{n+1}) - \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n)\|_{L^p(Q)} \leq C (\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))}) \|\nabla f\|_{L^\infty([0,T] \times Q)} \Delta t^3.$$

■

On continue avec la proposition suivante :

Proposition 7 *On suppose que $f \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}_{c,per_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$, $m \geq 0$ et que π_h est un opérateur linéaire continu d'interpolation de $W^{m+1,\infty}(Q)$ dans X_h , alors il existe une constante C telle que pour $i = 1, 2$,*

$$\|\mathcal{T}_i f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))}, \quad (2.28)$$

$$\|\tilde{\mathcal{T}}_i f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))} \quad (2.29)$$

et

$$\left\| (\mathcal{T}_i - \tilde{\mathcal{T}}_i) f \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \leq Ch^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))}. \quad (2.30)$$

Preuve. Preuve de (2.28) : Il est évident que

$$\|f(t, x - v\Delta t/2, v)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} = \|f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \quad (2.31)$$

et

$$\left\| f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} = \|f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))}. \quad (2.32)$$

D'autre part pour le gradient de $f(t, x - v\Delta t/2, v)$ on a

$$\|\partial_x (f(t, x - v\Delta t/2, v))\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} = \|\partial_x f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))}$$

et

$$\|\partial_v (f(t, x - v\Delta t/2, v))\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \leq \frac{\Delta t}{2} \|\partial_x f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} + \|\partial_v f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))},$$

et par suite

$$\|f(t, x - v\Delta t/2, v)\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(Q))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(Q))}.$$

De la même manière on a

$$\|f(t, x - v\Delta t/2, v)\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))}.$$

Par ailleurs le gradient de $f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t)$ donne

$$\begin{aligned} \left\| \partial_x \left(f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t) \right) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} &\leq \|\partial_x f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} + \\ &\Delta t \|\partial_x \tilde{E}\|_{L^\infty([0,T] \times [0,L])} \|\partial_v f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \end{aligned}$$

et

$$\left\| \partial_v \left(f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t) \right) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \leq \|\partial_v f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))},$$

et par suite

$$\begin{aligned} \left\| f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t) \right\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(Q))} &\leq (1 + C\Delta t) \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(Q))} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(Q))}. \end{aligned}$$

De la même façon, comme $\tilde{E} \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^{m+1}(\mathbb{R}))$ on obtient

$$\left\| f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t) \right\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))},$$

ce qui complète la preuve de (2.28).

Preuve de (2.29) : Soit π_h l'opérateur d'interpolation caractérisé par ses fonctions de base $\{\psi_k\}$. Alors $\pi_h f$ peut se récrire avec $f_k(t) = f(t, x_k, v_k)$ comme

$$\pi_h f(t, x, v) = \sum_k f(t, x_k, v_k) \psi_k(x, v) = \sum_k f_k(t) \psi_k(x, v).$$

Comme chaque ψ_k appartient à $L^\infty(Q)$, et est à support compact il existe une constante M telle que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k |\psi_k(x, v)| \right\|_{L^\infty(Q)} &\leq \sup_{T \in \mathcal{T}_h} \left\| \sum_k |\psi_k(x, v)| \right\|_{L^\infty(T)} \\ &\leq \text{card}(\Sigma_T) \sup_{T \in \mathcal{T}_h} \max_{k \in \Sigma_T} \max_{(x,v) \in T} |\psi_k(x, v)| \\ &\leq M, \end{aligned}$$

où Σ_T est l'ensemble des degrés de liberté sur le triangle T . On en déduit que

$$\|\pi_h f\|_{L^\infty(Q)} \leq \|f\|_{L^\infty(Q)} \sum_k |\psi_k(x, v)| \leq M \|f\|_{L^\infty(Q)}$$

et finalement

$$\|\pi_h f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))}.$$

Puisque $f \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}_{c, \text{per}_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ on a

$$\begin{aligned} \|\pi_h f(t, x - v\Delta t/2, v)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} &\leq C \|f(t, x - v\Delta t/2, v)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \pi_h f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} &\leq C \left\| f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t) \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))} \end{aligned}$$

qui complète la preuve de (2.29). Finalement l'inégalité (2.22) nous permet de conclure que

$$\begin{aligned} \|f(t, x - v\Delta t/2, v) - \pi_h f(t, x - v\Delta t/2, v)\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \\ \leq Ch^{m+1} \|f(t, x - v\Delta t/2, v)\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))} \\ \leq Ch^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left\| f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t) - \pi_h f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t) \right\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(Q))} \\ & \leq Ch^{m+1} \|f(t, x, v - \tilde{E}(t, x)\Delta t)\|_{L^\infty(0, T; W^{m+1, \infty}(Q))} \\ & \leq Ch^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0, T; W^{m+1, \infty}(Q))} \end{aligned}$$

ce qui complète la démonstration de la proposition. ■

Le lemme qui suit donne une estimation de l'erreur de discrétisation en espace.

Lemme 8 *On suppose que $f \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}_{c, \text{per}_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ et que π_h est un opérateur linéaire continu d'interpolation de $W^{m+1, \infty}(Q)$ dans X_h alors, il existe une constante C telle que*

$$\left\| \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L^\infty(Q)} \leq Ch^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0, T; W^{m+1, \infty}(Q))}.$$

Preuve. On commence par remarquer la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) &= (\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) \\ &+ \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ (\mathcal{T}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2) \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) \\ &+ \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ (\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n). \end{aligned} \quad (2.33)$$

En utilisant (2.28), (2.29) et (2.30) on obtient une majoration du premier terme de la décomposition (2.33)

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n)\|_{L^\infty(Q)} &\leq Ch^{m+1} |\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n)|_{W^{m+1, \infty}(Q)}, \\ &\leq Ch^{m+1} |\mathcal{T}_1 f(t^n)|_{W^{m+1, \infty}(Q)}, \\ &\leq Ch^{m+1} |f(t^n)|_{W^{m+1, \infty}(Q)}, \\ &\leq Ch^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0, T; W^{m+1, \infty}(Q))}, \end{aligned}$$

et pour le second terme de (2.33)

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{T}}_1 \circ (\mathcal{T}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2) \circ \mathcal{T}_1 f(t^n)\|_{L^\infty(Q)} &\leq C \|(\mathcal{T}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2) \circ \mathcal{T}_1 f(t^n)\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq Ch^{m+1} |\mathcal{T}_1 f(t^n)|_{W^{m+1, \infty}(Q)} \\ &\leq Ch^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0, T; W^{m+1, \infty}(Q))}, \end{aligned}$$

et pour le troisième terme de (2.33)

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ (\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n)\|_{L^\infty(Q)} &\leq C \|(\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n)\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq Ch^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0, T; W^{m+1, \infty}(Q))}, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme. ■

On poursuit la preuve en établissant le lemme suivant qui donne une estimation de l'erreur de couplage entre la résolution de l'équation de Vlasov et de Poisson.

Lemme 9 *On suppose que $f \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}_{c, \text{per}_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ et que π_h est un opérateur linéaire continu d'interpolation de $W^{m+1, \infty}(Q)$ dans X_h , alors il existe une constante C telle que*

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L^\infty(Q)} \leq C \Delta t (e^n + h^{m+1}) \|f\|_{L^\infty(0, T; W^{m+1, \infty}(Q))}$$

où

$$e^n = \|f(t^n) - f_h(t^n)\|_{L^\infty(Q)}.$$

Preuve. D'un côté on à

$$(\tilde{\mathcal{T}}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2^*)g(t^n) = \pi_h \left(g(t^n, x, v - \Delta t \tilde{E}^{n+1/2}(x)) - g(t^n, x, v - \Delta t E_h^{n+1/2}(x)) \right).$$

D'un autre côté on a

$$\begin{aligned} & \left| g(t^n, x, v - \Delta t \tilde{E}^{n+1/2}(x)) - g(t^n, x, v - \Delta t E_h^{n+1/2}(x)) \right| \\ & \leq \Delta t \left| \tilde{E}^{n+1/2}(x) - E_h^{n+1/2}(x) \right| \|\nabla g(t^n)\|_{L^\infty(Q)}. \end{aligned}$$

où $\tilde{E}^{n+1/2}(x)$ et $E_h^{n+1/2}(x)$ peuvent se récrire comme

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{n+1/2}(x) &= \int_0^L K(x, y) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_1 f(t^n, y, v) dv - 1 \right) dy, \\ E_h^{n+1/2}(x) &= \int_0^L K(x, y) \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n, y, v) dv - 1 \right) dy. \end{aligned}$$

Alors on établit que

$$\begin{aligned} E_h^{n+1/2}(x) - \tilde{E}^{n+1/2}(x) &= \int_0^L K(x, y) \left(\int_{\mathbb{R}} \left[\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n, y, v) - \mathcal{T}_1 f(t^n, y, v) \right] dv \right) dy, \\ &= \int_0^L K(x, y) \left(\int_{|v| \leq Q(T)} \pi_h \left[f_h(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) - f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) \right] dv \right) dy \\ &+ \int_0^L \int_{|v| \leq Q(T)} K(x, y) \left(\pi_h f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) - f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) \right) dv dy, \end{aligned}$$

d'où il vient

$$\begin{aligned} & \left\| E_h^{n+1/2} - \tilde{E}^{n+1/2} \right\|_{L^\infty([0, L])} \\ & \leq LQ(T) \|K\|_{L^\infty} \left\| \pi_h \left[f_h(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) - f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) \right] \right\|_{L^\infty(Q)} \\ & + LQ(T) \|K\|_{L^\infty} \left\| \pi_h f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) - f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) \right\|_{L^\infty(Q)}, \end{aligned} \tag{2.34}$$

et en utilisant les estimations (2.28), (2.29), (2.30) on obtient

$$\begin{aligned} & \left\| E_h^{n+1/2} - \tilde{E}^{n+1/2} \right\|_{L^\infty([0, L])} \leq LQ(T) \|K\|_{L^\infty} \|\pi_h\|_{L^\infty} \|f_h(t^n) - f(t^n)\|_{L^\infty(Q)} \\ & + CLQ(T) \|K\|_{L^\infty} h^{m+1} \|f(t^n)\|_{W^{m+1, \infty}(Q)}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Finalement on a l'estimation

$$\left\| E_h^{n+1/2} - \tilde{E}^{n+1/2} \right\|_{L^\infty([0,L])} \leq C (e^n + h^{m+1}),$$

et par conséquent

$$\left\| (\tilde{\mathcal{T}}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2^*)g(t^n) \right\|_{L^\infty(Q)} \leq C\Delta t (e^n + h^{m+1}) \|\nabla g(t^n)\|_{L^\infty(Q)}. \quad (2.36)$$

Alors, en utilisant (2.28) et (2.36) il vient

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ (\tilde{\mathcal{T}}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2^*) \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L^\infty(Q)} &\leq C \left\| (\tilde{\mathcal{T}}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2^*) \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq C\Delta t (e^n + h^{m+1}) \left\| \nabla(\tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n)) \right\|_{L^\infty(Q)}. \end{aligned}$$

Maintenant on cherche à estimer le terme $\left\| \nabla(\tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n)) \right\|_{L^\infty(Q)}$. Pour ce faire on procède de la manière suivante. Grâce à (2.22) on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \nabla(\tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n)) \right\|_{L^\infty(Q)} &\leq \left\| \nabla(\pi_h f(t^n, x - v\Delta t/2, v)) \right\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq \left\| \nabla[(\pi_h f - f)(t^n, x - v\Delta t/2, v)] \right\|_{L^\infty(Q)} \\ &\quad + \left\| \nabla(f(t^n, x - v\Delta t/2, v)) \right\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq Ch^m \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))} + \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))}. \end{aligned}$$

En fait cette inégalité est due à la continuité de π_h de $W^{m+1,\infty}(Q)$ dans X_h . Finalement on obtient

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ (\tilde{\mathcal{T}}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2^*) \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L^\infty(Q)} \leq C\Delta t (e^n + h^{m+1}) \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(Q))}$$

ce qui complète la preuve. ■

Maintenant on établit le lemme qui donne une information sur la stabilité du schéma numérique.

Lemme 10 Soit π_h l'opérateur d'interpolation de $W^{2,\infty}(Q)$ dans X_h avec $P_m = P_1$, alors on a

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L^\infty(Q)} \leq e^n. \quad (2.37)$$

Preuve. Comme π_h est un opérateur d'interpolation linéaire, les fonctions de base satisfont

$$0 \leq \psi_k \leq 1$$

et

$$\sum_k \psi_k = 1,$$

et par conséquent on a

$$\|\pi_h\|_{L^\infty} = \sup_{\substack{f \in L^\infty \\ f \neq 0}} \frac{\|\pi_h f\|_{L^\infty(Q)}}{\|f\|_{L^\infty(Q)}} \leq 1.$$

En effet on a

$$\begin{aligned} |\pi_h g| &= \left| \sum_k g(x_k, v_k) \psi_k(x, v) \right| \\ &\leq \sum_k |g_k| \psi_k(x, v) \\ &\leq \|g\|_{L^\infty} \sum_k \psi_k = \|g\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Par conséquent on obtient de manière évidente

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L^\infty(Q)} &\leq \left\| \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq \|f(t^n) - f_h(t^n)\|_{L^\infty(Q)}. \end{aligned}$$

ce qui complète la preuve. ■

Maintenant on est en mesure de donner une preuve du théorème principal.

Preuve du théorème principal. On cherche à évaluer l'erreur globale au temps t^{n+1}

$$e^{n+1} = \|f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v)\|_{L^\infty(Q)}.$$

On décompose alors $f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v)$ comme il suit

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v) &= f(t^{n+1}, x, v) - \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) \quad (2.38) \\ &\quad + \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n, x, v) - f_h(t^n, x, v)). \end{aligned}$$

Finalement si l'on met ensemble les lemmes 6, 8, 9, 10 on obtient l'estimation suivante

$$e^{n+1} \leq (1 + C\Delta t)e^n + C(\|f\|_{\mathcal{G}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))}) (\Delta t^3 + h^2 + h^2 \Delta t).$$

Une inégalité de Grönwall discrète nous permet d'établir que

$$e^{n+1} \leq \exp(CT)e^0 + C(\|f\|_{\mathcal{G}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))}) \left(\Delta t^2 + \frac{h^2}{\Delta t} + h^2 \right).$$

Comme e^0 est une erreur d'interpolation fixe on obtient

$$e^n \leq C(\|f\|_{\mathcal{G}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))}) \left(\Delta t^2 + \frac{h^2}{\Delta t} + h^2 \right).$$

Afin de prouver la convergence du champ électrique on évalue

$$\|E(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2}\|_{L^\infty([0,L])}.$$

Pour estimer ce terme on procède comme cela a été fait dans la preuve des lemmes 6 et 9. Alors on obtient

$$\|\tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2}\|_{L^\infty([0,L])} \leq C \left(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))} \right) \left(\Delta t^2 + h^2 + \frac{h^2}{\Delta t} \right),$$

et

$$\|E(t^{n+1/2}) - \tilde{E}(t^{n+1/2})\|_{L^\infty([0,L])} \leq C \left(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))} \right) \Delta t^2$$

si bien que l'on a

$$\|E(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2}\|_{L^\infty([0,L])} \leq C \left(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{2,\infty}(Q))} \right) \left(\Delta t^2 + h^2 + \frac{h^2}{\Delta t} \right).$$

■

2.3.5 Autres résultats

On peut prouver la convergence du schéma numérique sous des conditions de régularité affaiblies. En suivant la preuve d'existence et d'unicité de la solution du problème de Cauchy pour le système de Vlasov-Maxwell faite par Cooper et Klimas [54], si l'on prend f_0 à support compact en vitesse tel que

$$f_0 \in \mathcal{C}_{b,per_x} \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v),$$

le système de Vlasov-Poisson périodique donné par les équations (2.11), (2.16), (2.17), et (2.18) a une unique solution (f, E) tel que f est à support compact en vitesse et

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{C}_b(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x} \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)), \\ \partial_t f &\in L^\infty(0, T; L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)), \end{aligned}$$

où la dérivée est prise au sens des distributions et

$$E \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^1(\mathbb{R}_x)).$$

Maintenant on établit le théorème.

Théorème 11 *On suppose que $f_0 \in \mathcal{C}_{b,per_x} \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ à support compact en vitesse. Soit $\alpha > 0$, $h \sim \Delta t^{1/\varepsilon}$, avec $0 < \varepsilon < 1$, alors (f_h, E_h) , la solution numérique du système de Vlasov-Poisson périodique converge vers (f, E) et il existe une constante $C = C \left(\|f\|_{\mathcal{C}_b(0,T;W^{1,\infty}(Q))}, \|\partial_t f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \right)$ indépendante de Δt et h telle que*

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \leq C (\Delta t + h + h^{1-\varepsilon})$$

et

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C (\Delta t + h + h^{1-\varepsilon})$$

Preuve. Afin de prouver le théorème 11 on examine comment les lemmes 6, 8, 9, 10 et la proposition 7 peuvent s'adapter aux nouvelles hypothèses de régularité. On commence avec le lemme 6. Maintenant on ne peut plus appliquer le développement de Taylor puisque la solution n'est pas assez régulière. On doit alors récrire toutes les estimations. Tout d'abord on remarque que l'on peut écrire

$$\begin{aligned}
X(t^{n+1/2}) - (x - v\Delta t/2) &= X(t^{n+1/2}) - (X(t^{n+1}) - V(t^{n+1})\frac{\Delta t}{2}) \\
&= \int_{t^{n+1}}^{t^{n+1/2}} (V(t) - V(t^{n+1})) dt \\
&= \int_{t^{n+1}}^{t^{n+1/2}} \int_{t^{n+1}}^t E(\tau, X(\tau)) d\tau dt \\
&\leq C\Delta t^2 \|E\|_{L^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \\
&\leq C\Delta t^2.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Ensuite on observe que l'on a la décomposition suivante

$$f(t^{n+1/2}, y, v) - f(t^n, y - v\Delta t/2, v) = \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} \partial_t f(t, y, v) dt + \int_{y-v\Delta t/2}^y \partial_x f(t^n, x, v) dx$$

Comme $f \in \mathcal{C}_b^1(0, T; W^{1,\infty}(Q))$ et $\partial_t f \in L^\infty(0, T; L^\infty(Q))$ en intégrant la décomposition précédente on obtient

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \int_{\mathbb{R}_v} |f(t^{n+1/2}, y, v) - f(t^n, y - v\Delta t/2, v)| dy dv \leq \\
&\int_0^L \int_{\mathbb{R}_v} \int_{t^n}^{t^{n+1/2}} |\partial_t f(t, y, v)| dt dv dy + \int_0^L \int_{\mathbb{R}_v} \int_{y-v\Delta t/2}^y |\partial_x f(t^n, x, v)| dx dv dy,
\end{aligned}$$

et par suite il vient

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \int_{\mathbb{R}_v} |f(t^{n+1/2}, y, v) - f(t^n, y - v\Delta t/2, v)| dy dv \\
&\leq CLQ^2(T)\Delta t \left(\|\partial_t f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} + \|\partial_x f\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \right) \\
&\leq C\Delta t.
\end{aligned} \tag{2.40}$$

En utilisant la formulation intégrale du champ électrique (2.11) il en résulte l'inégalité suivante

$$\left| E(t^{n+1/2}, x) - \tilde{E}(t^{n+1/2}, x) \right| \leq C\Delta t. \tag{2.41}$$

Par ailleurs on écrit

$$\begin{aligned}
V(t^n) - \tilde{V}(t^n) &= \int_{t^{n+1}}^{t^n} E(t, X(t)) dt + \Delta t \tilde{E}(t^{n+1/2}, x - v\Delta t/2) \\
&= \int_{t^{n+1}}^{t^n} (E(t, X(t)) - E(t^{n+1/2}, X(t))) dt \\
&\quad + \int_{t^{n+1}}^{t^n} (E(t^{n+1/2}, X(t)) - E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}))) dt \\
&\quad + \Delta t \{E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1}) - V(t^{n+1})\Delta t/2) - E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}))\} \\
&\quad + \Delta t \{\tilde{E}(t^{n+1/2}, X(t^{n+1}) - V(t^{n+1})\Delta t/2) - E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1}) - V(t^{n+1})\Delta t/2)\}
\end{aligned}$$

Puisque $E \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^1(\mathbb{R}_x))$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\sup \left\{ \left| V(t^n; t^{n+1}, x, v) - \tilde{V}(t^n; t^{n+1}, x, v) \right| \mid \forall (x, v) \in [0, L] \times \mathbb{R} \right\} \\
&\leq C\Delta t^2 \text{Lip}(E(\cdot, x)) + CQ(T)\Delta t^2 \text{Lip}(E(t, \cdot)) + C\Delta t^3 \text{Lip}(E(t, \cdot)) + C\Delta t^2 \\
&\leq C\Delta t^2.
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Maintenant on cherche à estimer $X(t^n) - \tilde{X}(t^n)$. Il est facile de voir que l'on a

$$X(t^n) - \tilde{X}(t^n) = \int_{t^{n+1}}^{t^n} \int_{t^{n+1}}^t E(\tau, X(\tau)) d\tau dt - \frac{\Delta t^2}{2} \tilde{E}\left(t^{n+1/2}, X(t^{n+1}) - V(t^{n+1})\frac{\Delta t}{2}\right)$$

de telle sorte que

$$\sup \left\{ \left| X(t^n) - \tilde{X}(t^n) \right| \mid \forall (x, v) \in [0, L] \times \mathbb{R} \right\} \leq C\Delta t^2 \left(\|E\|_{L^\infty} + \|\tilde{E}\|_{L^\infty} \right) \leq C\Delta t^2. \tag{2.43}$$

A présent on se sert des estimations (2.42) et (2.43) afin de borner en norme L^∞ la quantité

$$\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - f(t^{n+1}, x, v) = f(t^n, \tilde{X}(t^n), \tilde{V}(t^n)) - f(t^n, X(t^n), V(t^n)).$$

D'après l'injection continue $W^{1,\infty} \hookrightarrow \mathcal{C}^{0,1}$, il vient

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - f(t^{n+1})\|_{L^\infty(Q)} &\leq C \text{Lip}(f(t^n, \cdot, \cdot)) \Delta t^2, \\
&\leq C \sup_{t \in [0, T]} \text{Lip}(f(t, \cdot, \cdot)) \Delta t^2, \\
&\leq C\Delta t^2.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

En suivant la démonstration de la proposition 7, si on prend $f \in \mathcal{C}_b^1(0, T; W^{1,\infty}(Q))$, $E \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^1(\mathbb{R}))$ et si on prend les dérivées au sens des distributions alors, en utilisant l'estimation d'erreur (2.22) on peut encore écrire avec $m \in \{0, 1\}$

$$\|\mathcal{T}_i f\|_{L^\infty(0, T; W^{m,\infty}(Q))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0, T; W^{m,\infty}(Q))}, \tag{2.45}$$

$$\|\tilde{\mathcal{T}}_i f\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(Q))} \leq C \|f\|_{L^\infty(0, T; W^{m,\infty}(Q))} \tag{2.46}$$

et

$$\left\| (\mathcal{T}_i - \tilde{\mathcal{T}}_i) f \right\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \leq Ch \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty}(Q))}. \quad (2.47)$$

Par conséquent le lemme 8 donne l'estimation

$$\left\| \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L^\infty(Q)} \leq Ch.$$

L'estimation du lemme 9 doit être remplacée par

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L^\infty(Q)} \leq C\Delta t (e^n + h).$$

Afin de justifier cette inégalité on doit montrer que $\text{Lip}(\tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n))$ est bornée. En effet

$$\text{Lip}(\tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n)) = \text{Lip}(\pi_h f(t^n, x - v\Delta t/2, v)) \leq \|\pi_h\|_{L^\infty} \text{Lip}(f(t^n, \cdot, \cdot)) < +\infty.$$

Finalement on a obtenu toutes les estimations *a priori* en observant que le résultat de stabilité (2.37) reste valable. La preuve du théorème est alors la même que celle du théorème 4 et on obtient

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty(Q))} \leq C \left(\Delta t + h + \frac{h}{\Delta t} \right)$$

et

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C \left(\Delta t + h + \frac{h}{\Delta t} \right).$$

Maintenant si on prend $\Delta t \sim h^\varepsilon$ avec $0 < \varepsilon < 1$ on a le résultat désiré. En fait le meilleur choix pour ε est 1/2 car alors la convergence a lieu à l'ordre 1/2. ■

Remarque 12 *Sous les hypothèses de régularité suivantes, $f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ s'il existe un opérateur d'interpolation π_h qui satisfait à la fois la condition de consistance*

$$\|f - \pi_h f\|_{L^\infty(0,T;L^p(Q))} \leq Ch^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,p}(Q))} \quad (2.48)$$

et la condition de stabilité

$$\|\pi_h f\|_{L^\infty(0,T;L^p(Q))} \leq (1 + Ch) \|f\|_{L^\infty(0,T;L^p(Q))} \quad (2.49)$$

notre méthode peut facilement s'appliquer pour prouver la convergence de schémas d'ordre élevé en norme L^p et trouver les estimations d'erreur pour la fonction de distribution

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^p(Q))} \leq C \left(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;W^{m+1,p}(Q))} \right) \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right)$$

et le champ électrique

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C \left(\|f\|_{\mathcal{E}^2(0,T;W^{m+1,p}(Q))} \right) \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right).$$

Malheureusement l'interpolation de Lagrange d'ordre élevé ne satisfait pas la condition de stabilité (2.49). En outre il semble difficile mais pas impossible de construire des opérateurs d'interpolation π_h qui satisfont à la fois les deux conditions (2.48) et (2.49). Si on utilise un opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre élevé la solution approchée $f_h(t^n)$ appartient $W^{1,p}(Q)$. Le schéma numérique consiste en une succession d'action d'opérateurs de transport et de projection sur l'espace d'élément finis généré par l'élément finis de Lagrange d'ordre élevé. L'opérateur de transport laisse la norme de la solution inchangée. Par conséquent le schéma est stable si l'opérateur d'interpolation π_h est stable, c'est-à-dire si $\|\pi_h\|_{L^p} \leq 1 + \varepsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$. Malheureusement l'interpolation de Lagrange d'ordre élevé n'a pas de bonnes propriétés de stabilité. Soit $\tau_{h,\xi}$ l'opérateur de translation défini par $\tau_{z,\xi} f_h(t^n, x, v) = f_h(t^n, x - z, v - \xi) = g_h(t^n, x, v)$. Alors $g_h(t^n) \in W^{1,p}(Q)$, et on a

$$\begin{aligned} \|\pi_h \circ \tau_{z,\xi} f_h(t^n)\|_{L^p(Q)} &= \|\pi_h g_h(t^n)\|_{L^p(Q)} \\ &\leq \|g_h(t^n)\|_{L^p(Q)} + \|\pi_h g_h(t^n) - g_h(t^n)\|_{L^p(Q)} \\ &\leq \|g_h(t^n)\|_{L^p(Q)} + Ch |g_h(t^n)|_{W^{1,p}(Q)} \\ &\leq \|g_h(t^n)\|_{L^p(Q)} + C \end{aligned}$$

puisque $|g_h(t^n)|_{W^{1,p}(Q)} \sim O(h^{-1})$, avec C une constante indépendante de h et telle que $C > 1$.

On peut aussi montrer la convergence du schéma numérique avec une donnée initiale qui n'est pas à support compact. Si on prend f_0 tel que

$$f_0 \in \mathcal{C}_{b,per_x} \cap W^{1,\infty} \cap W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v),$$

$$0 < f_0 \leq (1 + |v|)^{-\lambda}, \quad |\nabla f_0| \leq (1 + |v|)^{-\lambda} \quad p.p., \quad v \nabla f_0 \in L_x^\infty(L_v^1)$$

le système de Vlasov-Poisson périodique donné par les équations (2.11), (2.16), (2.17), et (2.18) a une unique solution (f, E) telle que

$$0 < f(t, x, v) \leq (1 + |v|)^{-\lambda}, \quad |\nabla f(t, x, v)| \leq (1 + |v|)^{-\lambda} \quad p.p. \quad (2.50)$$

$$f \in \mathcal{C}_b(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x} \cap W^{1,\infty} \cap W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)),$$

$$v \nabla f, \partial_t f \in L^\infty(0, T; L_x^\infty(L_v^1)),$$

où la dérivée est prise au sens des distributions et

$$E \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^1(\mathbb{R}_x)).$$

Maintenant on énonce le théorème.

2.3. Convergence d'un schéma semi-Lagrangien sur un maillage non structuré de l'espace des phases

Théorème 13 *On suppose que $f_0 \in \mathcal{C}_{b,per_x} \cap W^{1,\infty} \cap W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, positive, et qu'il existe une constante $\lambda > 1$ tel que $f_0, |\nabla f_0| \leq (1 + |v|)^{-\lambda-1}$ p.p.. Soit α un réel positif tel que $0 < \alpha < \lambda$, alors on suppose que la borne du support en vitesse R évolue en $h^{-1/\alpha}$. De plus on fait l'hypothèse que $\Delta t \sim h^\eta$, $0 < \eta < 1$. Alors (f_h, E_h) , la solution numérique du système de Vlasov-Poisson périodique converge vers (f, E) et il existe une constante $C = C\left(\|f\|_{L^\infty(0,T;W_{w,\lambda+1}^{1,\infty}(Q))}, \|\partial_t f\|_{L^\infty(0,T;L_x^\infty(L_v^1))}, \|v\nabla f\|_{L^\infty(0,T;L_x^\infty(L_v^1))}\right)$ indépendante de $\Delta t, h$ telle que*

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))} \leq C (\Delta t + h + h^{1-\eta} + h^{\lambda/\alpha})$$

et

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C (\Delta t + h + h^{1-\eta} + h^{\lambda/\alpha}).$$

Avant de donner la preuve du théorème 13 on établit quelques propriétés sur la solution approchée f_h qui vont nous permettre de montrer que $f_h \in L_{w,\lambda}^\infty(Q)$.

Lemme 14 *On suppose que $0 \leq f_0(x, v) \leq \zeta(x, v) = (1 + |v|)^{-\lambda}$, pour $\lambda > 1$. Alors, il existe une constante C dépendant seulement de T, L , et f_0 telle que*

$$0 \leq f_h(t, x, v) \leq C \zeta_h(x, v) \quad t \in [0, T], \quad (x, v) \in Q \quad (2.51)$$

où

$$\zeta_h(x, v) = \sum_k \frac{1}{(1 + |v_k|)^\lambda} \psi_k(x, v).$$

Et il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|f_h(t)\|_{L^1(Q)} \leq C \quad t \in [0, T] \quad (2.52)$$

et

$$\|f_h(t)\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} \leq C \quad t \in [0, T] \quad (2.53)$$

Preuve. On commence par le transport en x . Notons qu'il existe une constante R indépendante de h telle que pour tout triangle T_m de la triangulation \mathcal{T}_h , il existe une boule $B(a_m, Rh)$ de centre a_m et de rayon Rh qui contient T_m . Soit N_k un sommet du triangle T_m . Si on considère le transport en x , l'origine de la caractéristique, $x_k^* = x_k - v_k \Delta t / 2$ qui se termine au sommet N_k appartient au triangle T_m^* . Si N_o, N_p , et N_q sont les sommets du triangle T_m^* on a

$$|v_k - v_o| \leq 2Rh, \quad |v_k - v_p| \leq 2Rh, \quad \text{et} \quad |v_k - v_q| \leq 2Rh.$$

D'un autre côté on établit que

$$\frac{\zeta_h(x_j, v_j)}{\zeta_h(x_k, v_k)} = \frac{(1 + |v_k|)^\lambda}{(1 + |v_j|)^\lambda} \leq 1 + C_1(\lambda, R)h, \quad j = \{o, p, q\}. \quad (2.54)$$

Maintenant, si on considère le transport en v , l'origine de caractéristique $v_k^* = v_k - E_h(t^{n+1/2})\Delta t$ qui se termine au sommet N_k appartient au triangle T_m^* . Si

N_i , N_s , et N_l sont les sommets du triangle T_m^* , puisque $\|E_h\|_{\ell^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))}$ est bornée on a

$$|v_k - v_i| \leq C\Delta t, \quad |v_k - v_s| \leq C\Delta t \text{ et } |v_k - v_l| \leq C\Delta t,$$

alors on peut écrire

$$\frac{\zeta_h(x_j, v_j)}{\zeta_h(x_k, v_k)} = \frac{(1 + |v_k|)^\lambda}{(1 + |v_j|)^\lambda} \leq 1 + C_2(\lambda, R)\Delta t, \quad j = \{i, s, l\}. \quad (2.55)$$

Si on pose $b_1 = 1 + C_1(\lambda, R)h$, $b_2 = 1 + C_2(\lambda, R)\Delta t$ et $b = b_1 b_2 b_1$ on a

$$f_h(0, x_k, v_k) \leq \frac{1}{(1 + |v_k|)^\lambda} \leq \frac{b^0}{(1 + |v_k|)^\lambda}$$

et par suite

$$f_h(0, x, v) \leq b^0 \zeta_h(x, v).$$

On utilise alors un argument de récurrence que l'on appliquera à chaque advection. Si on suppose

$$f_h(t^n, x_k, v_k) \leq b^n \zeta_h(x_k, v_k)$$

et par suite

$$f_h(t^n, x, v) \leq b^n \zeta_h(x, v)$$

le schéma numérique donne pour la première demi-advection par rapport à la variable x

$$f_h(t^{n+1/2}, x_k, v_k) = \sum_l f_h(t^n, x_l, v_l) \psi_l(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k)$$

Soit T_m^* le triangle qui contient l'origine de la caractéristique provenant du noeud N_k . Soit N_o , N_p et N_q les trois sommets de T_m^* . On peut alors écrire

$$\frac{f_h(t^{n+1/2}, x_k, v_k)}{\zeta_h(x_k, v_k)} = \lambda_o \frac{f_{h,o}^n}{\zeta_h(x_k, v_k)} + \lambda_p \frac{f_{h,p}^n}{\zeta_h(x_k, v_k)} + \lambda_q \frac{f_{h,q}^n}{\zeta_h(x_k, v_k)}$$

où

$$\lambda_l = \psi_l(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k),$$

et

$$f_{h,l}^n = f_h(t^n, x_l, v_l).$$

En utilisant la propriété (2.54) de ζ_h , et la propriété

$$\lambda_o + \lambda_p + \lambda_q = 1$$

on obtient

$$\frac{f_h(t^{n+1/2}, x_k, v_k)}{\zeta_h(x_k, v_k)} \leq b^n \lambda_o \frac{\zeta_h(x_o, v_o)}{\zeta_h(x_k, v_k)} + b^n \lambda_p \frac{\zeta_h(x_p, v_p)}{\zeta_h(x_k, v_k)} + b^n \lambda_q \frac{\zeta_h(x_q, v_q)}{\zeta_h(x_k, v_k)} \leq b_1 b^n.$$

En procédant de même pour les deux autres advections on a finalement

$$\frac{f_h(t^{n+1}, x_k, v_k)}{\zeta_h(x_k, v_k)} \leq b^{(n+1)} \quad \forall N_k \in \mathcal{T}_h.$$

Pour un temps fini T et pour tout $n \in \{0, \dots, T/\Delta t\}$, si on considère $h \leq \Delta t$, on a $b \leq 1 + C(C_1, C_2)\Delta t$, $b^{n+1} \leq \exp(C(C_1, C_2)T)$ et comme dans le cas continu il existe une fonction qui majore la fonction de distribution discrète

$$f_h(t, x, v) \leq C\zeta_h(x, v) \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall (x, v) \in Q.$$

Afin de prouver (2.52), on note que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \zeta_h(x, v) dx dv &= \sum_k \frac{1}{(1 + |v_k|)^\lambda} \int_{\mathbb{R}} \psi_k(x, v) dx dv \\ &= \sum_k \frac{\text{mes}(\mathcal{A}_k)}{(1 + |v_k|)^\lambda} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1 + |v|)^\lambda} < +\infty. \end{aligned}$$

Il reste à démontrer l'estimation (2.53). On a

$$\begin{aligned} \|f_h(t)\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} &\leq C \|\zeta_h(t)\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} \\ &\leq \left\| \sum_k \frac{(1 + |v|)^\lambda}{(1 + |v_k|)^\lambda} \psi_k(x, v) \right\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq (1 + C(R, \lambda)h) \left\| \sum_k \psi_k(x, v) \right\|_{L^\infty(Q)} \\ &\leq C. \end{aligned}$$

■

Le lemme suivant donne la stabilité et l'ordre d'approximation de l'opérateur d'interpolation π_h dans $L_{w,\lambda}^\infty$.

Lemme 15 Soit $g \in L_{w,\lambda}^\infty(Q)$ alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|\pi_h g\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} \leq (1 + Ch) \|g\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)}. \quad (2.56)$$

De plus si $g \in W_{w,\lambda}^{1,\infty}$ alors il existe une constante C indépendante de h telle que

$$\|\pi_h g - g\|_{W_{w,\lambda}^{k,\infty}(Q)} \leq Ch^{1-k} |g|_{W_{w,\lambda}^{1,\infty}(Q)}, \quad 0 \leq k \leq 1. \quad (2.57)$$

Preuve. Commençons par l'estimation (2.56).

$$\begin{aligned}
\|\pi_h g\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} &= \left\| \sum_k g(x_k, v_k) \psi_k(x, v) (1 + |v|)^\lambda \right\|_{L^\infty(Q)} \\
&= \left\| \sum_k g(x_k, v_k) (1 + |v_k|)^\lambda \psi_k(x, v) \frac{(1 + |v|)^\lambda}{(1 + |v_k|)^\lambda} \right\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq \left\| \sum_k g(x_k, v_k) (1 + |v_k|)^\lambda \psi_k(x, v) (1 + C(\lambda, R)h) \right\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq (1 + C(\lambda, R)h) \sup_k |g(x_k, v_k) (1 + |v_k|)^\lambda| \left\| \sum_k \psi_k(x, v) \right\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq (1 + Ch) \|g\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)}.
\end{aligned}$$

Maintenant démontrons l'estimation (2.57). Si on note $z = (x, v)$ et $z_k = (x_k, v_k)$ alors

$$\begin{aligned}
\|\pi_h g - g\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} &= \left\| \sum_k (g(x_k, v_k) - g(x, v)) \psi_k(x, v) (1 + |v|)^\lambda \right\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq \left\| \sum_k (1 + |v|)^\lambda \psi_k(x, v) |z_k - z| \int_0^1 |\nabla g(tz_k + (1-t)z)| dt \right\|_{L^\infty(Q)}.
\end{aligned}$$

Si on pose

$$|\nabla g(z^*)| = \sup_{t \in [0,1]} \text{ess} |\nabla g(tz_k + (1-t)z)|$$

alors on obtient

$$\begin{aligned}
\|\pi_h g - g\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} &\leq \left\| \sum_k Rh (1 + |v^*|)^\lambda |\nabla g(z^*)| \psi_k(x, v) \frac{(1 + |v|)^\lambda}{(1 + |v^*|)^\lambda} \right\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq Rh \sup_{z^*} \{(1 + |v^*|)^\lambda |\nabla g(z^*)|\} (1 + C(R, \lambda)h) \left\| \sum_k \psi_k(x, v) \right\|_{L^\infty(Q)} \\
&\leq Rh \sup_{z^*} \{(1 + |v^*|)^\lambda |\nabla g(z^*)|\} (1 + C(R, \lambda)h) \\
&\leq Ch |g|_{W_{w,\lambda}^{1,\infty}(Q)}
\end{aligned}$$

ce qui prouve (2.57) pour $k = 0$. Pour $k = 1$ il suffit de reprendre la démonstration précédente et de remarquer que

$$\left\| \sum_k |\nabla \psi_k(x, v)| \right\|_{L^\infty(Q)} \leq Ch^{-1}.$$

■

Maintenant on peut reprendre la preuve du théorème 13

Preuve du théorème 13. Afin de prouver le théorème on modifie les estimations *a priori* (2.40), (2.41), (2.42), (2.43) et (2.44), et on cherche à obtenir le même genre d'estimations *a priori* en norme $L_{w,\lambda}^\infty(Q)$.

Comme $v\nabla f, \partial_t f \in L^\infty(0, T; L_x^\infty(L_v^1))$ l'estimation (2.40) devient

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{\mathbb{R}_v} |f(t^{n+1/2}, y, v) - f(t^n, y - v\Delta t/2, v)| dy dv \\ \leq CL\Delta t \left(\|\partial_t f\|_{L^\infty(0, T, L_x^\infty(L_v^1))} + \|v\partial_x f\|_{L^\infty(0, T; L_x^\infty(L_v^1))} \right) \\ \leq C\Delta t, \end{aligned}$$

de telle sorte que l'on peut encore écrire

$$\left| E(t^{n+1/2}, x) - \tilde{E}(t^{n+1/2}, x) \right| \leq C\Delta t.$$

L'estimation (2.43) est encore valable mais l'inégalité (2.42) devient

$$|V(t^n) - \tilde{V}(t^n)| \leq C(1 + |v|)\Delta t^2.$$

L'estimation (2.44) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - f(t^{n+1})\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} &\leq \|\nabla f\|_{L_{w,\lambda+1}^\infty(Q)} \Delta t^2 \\ &\leq C\Delta t^2. \end{aligned}$$

On en conclut, que l'estimation du lemme 6 doit être remplacée par

$$\|\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - f(t^{n+1})\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} \leq C\Delta t^2$$

En suivant la preuve de la proposition 7, puisque $f \in \mathcal{C}_b(0, T; W^{1,\infty} \cap W_{\text{loc}}^{1,1}(Q))$ et $E \in \mathcal{C}^1(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^1(\mathbb{R}))$ en utilisant (2.56)-(2.57) et en prenant la dérivée au sens des distributions on a encore avec $m \in \{0, 1\}$,

$$\|\mathcal{T}_i f\|_{L^\infty(0, T; W_{w,\lambda}^{m,\infty}(Q))} \leq \|f\|_{L^\infty(0, T; W_{w,\lambda}^{m,\infty}(Q))},$$

$$\|\tilde{\mathcal{T}}_i f\|_{L^\infty(0, T; L_{w,\lambda}^\infty(Q))} \leq (1 + Ch)\|f\|_{L^\infty(0, T; L_{w,\lambda}^\infty(Q))}$$

et

$$\left\| (\mathcal{T}_i - \tilde{\mathcal{T}}_i) f \right\|_{L^\infty(0, T; L_{w,\lambda}^\infty(Q))} \leq Ch\|f\|_{L^\infty(0, T; W_{w,\lambda}^{1,\infty}(Q))}.$$

Par conséquent le lemme 8 donne l'estimation

$$\left\| \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} \leq Ch.$$

L'estimation du lemme 9 devient

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} \leq C\Delta t \left(e^n + \frac{1}{(1+R)^\lambda} + h \right) \quad (2.58)$$

où

$$e^n = \|f(t^n) - f_h(t^n)\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)}.$$

La preuve du lemme 9 demeure valable, exceptée l'estimation de $E_h^{n+1/2}(x) - \tilde{E}^{n+1/2}(x)$ que l'on modifie comme il suit. On récrit

$$\begin{aligned} E_h^{n+1/2}(x) - \tilde{E}^{n+1/2}(x) &= \int_0^L K(x, y) \left(\int_{\mathbb{R}} [\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n, y, v) - \mathcal{T}_1 f(t^n, y, v)] dv \right) dy, \\ &= \int_0^L K(x, y) \left(\int_{|v| \leq R} \pi_h \left[f_h(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) - f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) \right] dv \right) dy \\ &+ \int_0^L \int_{|v| > R} K(x, y) f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) dv dy \\ &+ \int_0^L \int_{|v| \leq R} K(x, y) \left(\pi_h f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) - f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) \right) dv dy, \end{aligned}$$

si bien que l'on obtient

$$\begin{aligned} \left\| E_h^{n+1/2} - \tilde{E}^{n+1/2} \right\|_{L^\infty([0,L])} &\leq \|K\|_{L^\infty} \|\pi_h\|_{L^\infty} \|f_h(t^n) - f(t^n)\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} \int_0^L \int_{\mathbb{R}} \frac{dx dv}{(1+|v|)^\lambda} \\ &+ \|K\|_{L^\infty} \|f(t^n)\|_{L^1(Q \setminus \Omega)} \\ &+ C \|K\|_{L^\infty} h \|f(t^n)\|_{W_{w,\lambda}^{1,\infty}(Q)} \int_0^L \int_{\mathbb{R}} \frac{dx dv}{(1+|v|)^\lambda}. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Grâce à l'hypothèse de décroissance (2.50) on majore le second terme de (2.59) et on obtient

$$\left\| E_h^{n+1/2} - \tilde{E}^{n+1/2} \right\|_{L^\infty([0,L])} \leq C \left(e^n + \frac{1}{(1+R)^\lambda} + h \right).$$

Pour finir de justifier l'inégalité (2.58) il reste à montrer que $\left\| \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)}$ est borné. En effet, grâce à (2.57) on a

$$\begin{aligned} \left\| \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} &\leq \left\| \nabla \left(\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1 \right) f(t^n) \right\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} + \left\| \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W_{w,\lambda}^{1,\infty}(Q))} \end{aligned}$$

Finalement grâce au lemme 15, si on suppose que $h \leq \Delta t$ on obtient la stabilité $L_{w,\lambda}^\infty$ de l'opérateur d'interpolation π_h c'est-à-dire, qu'il existe une constante C tel que

$$\|\pi_h f\|_{L_{w,\lambda}^\infty} \leq (1 + C \Delta t) \|f\|_{L_{w,\lambda}^\infty} \quad \forall f \in \mathcal{C}_b(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x} \cap L_{w,\lambda}^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)).$$

Il est alors évident que l'estimation du lemme 10 devient

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_{w,\lambda}^\infty(Q)} \leq (1 + C \Delta t) e^n.$$

Comme cela a été fait pour la preuve du théorème 4 une inégalité de type Grönwall discrète nous permet d'établir que

$$e^{n+1} \leq \exp(CT)e^0 + C \left(\Delta t + h + \frac{h}{\Delta t} + \frac{1}{(1+R)^\lambda} \right).$$

Si on suppose que $R = \frac{1}{h^{1/\alpha}}$, $\alpha > 0$, puisque e^0 est une erreur d'interpolation fixe que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut on obtient

$$e^{n+1} \leq C \left(\Delta t + h + \frac{h}{\Delta t} + h^{\lambda/\alpha} \right).$$

La fin de la preuve est alors la même que celle du théorème 4, et on obtient

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty_{w,\lambda}(Q))} \leq C \left(\Delta t + h + \frac{h}{\Delta t} + h^{\lambda/\alpha} \right)$$

et

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C \left(\Delta t + h + \frac{h}{\Delta t} + h^{\lambda/\alpha} \right).$$

qui impliquent les estimations du théorème 13 en prenant $\Delta t \sim h^\eta$, avec $0 < \eta < 1$ ■

Maintenant on donne quelques corollaires déduits à partir des résultats obtenus plus haut.

Corollaire 16 *On suppose que $f_0 \in \mathcal{C}_{b,per_x} \cap W^{1,\infty} \cap W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, et qu'il existe une constante $\lambda > 1$ tel que $f_0, |\nabla f_0| \leq (1 + |v|)^{-\lambda-1}$ p.p.. Soit α tel que $0 < \alpha < \lambda$ et R la borne du support en vitesse évoluant en $h^{-1/\alpha}$. De plus on fait l'hypothèse que $\Delta t \sim h^\eta$ avec $0 < \eta < 1$. Soit $1 \leq p \leq \infty$, alors le couple (f_h, E_h) , donné par le schéma numérique converge fortement vers (f, E) solution du système de Vlasov-Poisson périodique dans les normes L^p , $0 \leq p \leq \infty$, et il existe une constante positive C indépendante de Δt et h telle que*

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^p(Q))} \leq C \left(\Delta t + h + h^{1-\eta} + h^{\lambda/\alpha} \right),$$

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C \left(\Delta t + h + h^{1-\eta} + h^{\lambda/\alpha} \right).$$

et

$$\|\rho - \rho_h\|_{l^\infty(0,T;L^p(Q))} \leq C \left(\Delta t + h + h^{1-\eta} + h^{\lambda/\alpha} \right).$$

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème 13. En effet on a pour $p = \infty$

$$\begin{aligned} \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty(Q))} &\leq \|(1 + |v|)^{-\lambda}\|_{L^\infty(Q)} \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty_{w,\lambda}(Q))} \\ &\leq \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty_{w,\lambda}(Q))} \end{aligned}$$

et pour $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned} \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^p(Q))} &\leq \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))} \left(\int_0^L \int_{\mathbb{R}} \frac{dx dv}{(1+|v|)^{\lambda p}} \right)^{1/p} \\ &\leq C \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))}. \end{aligned}$$

En ce qui concerne la densité ρ on peut écrire, pour $p = \infty$

$$\begin{aligned} \|\rho - \rho_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}} (f - f_h) dv \right\|_{L^\infty([0,L])} \\ &\leq \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))} \left\| \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{(1+|v|)^\lambda} \right\|_{L^\infty([0,L])} \\ &\leq C \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))}, \end{aligned}$$

et pour $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned} \|\rho - \rho_h\|_{l^\infty(0,T;L^p([0,L]))} &\leq \left(\int_0^L \left| \int_{\mathbb{R}} (f - f_h) dv \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))} \left(\int_0^L \left| \int_{\mathbb{R}} \frac{dv}{(1+|v|)^\lambda} \right|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))}. \end{aligned}$$

■

Remarque 17 *Sous les hypothèses de régularité $f_0 \in \mathcal{C}_{b,per_x} \cap W_{w,\lambda}^{m+1,\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$ s'il existe un opérateur d'interpolation π_h qui vérifie à la fois l'hypothèse de consistance*

$$\|f - \pi_h f\|_{L^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))} \leq Ch^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0,T;W_{w,\lambda}^{m+1,\infty}(Q))} \quad (2.60)$$

et la condition de stabilité

$$\|\pi_h f\|_{L^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))} \leq (1 + Ch) \|f\|_{L^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))} \quad (2.61)$$

la méthode peut facilement s'adapter pour prouver la convergence de schémas d'ordre élevé en normes $L_{w,\lambda}^\infty$ et L^p $0 \leq p \leq \infty$ et trouver les estimations d'erreur

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L_{w,\lambda}^\infty(Q))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} + h^{\lambda/\alpha} \right)$$

et

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} + h^{\lambda/\alpha} \right)$$

L'interpolation de Lagrange de degré élevé ne satisfait pas la condition de stabilité (2.61). De plus il semble difficile de construire l'opérateur d'interpolation π_h qui vérifie à la fois les conditions (2.60) et (2.61).

2.4 Convergence de plusieurs classes de schémas semi-Lagrangiens d'ordre élevé

On vient de voir que sur des maillages non structurés toutes les estimations *a priori* se généralisent sans difficultés aux degrés élevés sauf l'estimation associée à la stabilité de l'opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre élevé. En fait ce défaut de stabilité est dû au phénomène de Runge qui traduit la formation de fortes oscillations artificielles sur le bord de l'élément fini. Cependant en faisant une étude plus détaillée sur des n -rectangles on verra que l'on peut récupérer la stabilité L^2 en considérant un opérateur d'interpolation avec des bases de Lagrange symétriques et obtenir des schémas d'ordre élevé.

2.4.1 Hypothèses de régularité pour le problème continu

Dans la suite de notre propos on supposera que $f_0(x, v)$ vérifie les hypothèses de régularité suivantes

$$f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$$

Comme il a été prouvé dans le livre de Glassey [95], si f_0 est régulière et à support compact la solution du système de Vlasov-Poisson reste régulière et à support compact pour tout temps. Le théorème 2 donne l'existence et l'unicité de la solution (f, E) telle que

$$f \in \mathcal{C}_b^{m+1}(0, T; \mathcal{C}_{c,per_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)) \quad (2.62)$$

$$E \in \mathcal{C}_b^{m+1}(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^{m+1}(\mathbb{R})). \quad (2.63)$$

2.4.2 Le problème discret.

2.4.2.1 Espaces d'approximation et opérateurs d'interpolation

Soit $\Omega = [0, L] \times [-R, R]$, avec $R > Q(T)$, et \mathcal{M}_h une grille cartésienne de l'espace des phases Ω . Alors \mathcal{M}_h est donnée par une suite croissante de points $(x_i)_{i \in \{0, \dots, N_x\}}$ appartenant à l'intervalle $[0, L]$ et une suite croissante de points $(v_i)_{i \in \{0, \dots, N_v\}}$ appartenant à l'intervalle $[-R, R]$.

Soit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ le pas de discrétisation dans l'espace physique et $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$ le pas de discrétisation dans l'espace des vitesses. Afin de simplifier l'étude on supposera que $\Delta x_i = \Delta x = L/(N_x + 1)$, et $\Delta v_i = \Delta v = 2R/(N_v + 1)$. Alors on définit h de la manière suivante

$$h = \max \{ \Delta x, \Delta v \}$$

On continue en définissant les cellules $C_{i+1/2, j+1/2}$ et $C_{i, j}$ par

$$C_{i+1/2, j+1/2} = (x_i, x_{i+1}) \times (v_j, v_{j+1}),$$

$$C_{i, j} = (x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \times (v_{j-1/2}, v_{j+1/2}),$$

où $x_{i+1/2} = (x_i + x_{i+1})/2$.

Alors on introduit les fonctions indicatrices $\chi_{i+1/2,j+1/2}$ et $\chi_{i,j}$ définies par

$$\chi_{i+1/2,j+1/2}(x, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, v) \in C_{i+1/2,j+1/2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\chi_{i,j}(x, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, v) \in C_{i,j} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit P_m l'espace des polynômes de Lagrange d'ordre inférieur ou égal à m , à une dimension. L'espace P_m est caractérisé par ses fonctions de base que l'on note $\{\ell_k\}_{k \in \{0, \dots, m\}}$, où

$$\ell_k(z) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{i=m} \frac{(z - z_i)}{(z_k - z_i)}.$$

avec $z_i = z_0 + ih$ les points d'interpolation. Soit X_h , l'espace d'approximation défini par

$$X_h = \left\{ g \in \mathcal{C}_b(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega) \mid g|_{C_{i+1/2,j+1/2}} \in P_m \otimes P_m, \ i \in \mathbb{Z}/N_x, \ j \in \mathbb{Z}/N_v \right\},$$

si m est impair, et

$$X_h = \left\{ g \in \mathcal{C}_b(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega) \mid g|_{C_{i,j}} \in P_m \otimes P_m, \ i \in \mathbb{Z}/N_x, \ j \in \mathbb{Z}/N_v \right\},$$

si m est pair.

Maintenant on définit l'opérateur d'interpolation π_h comme il suit. Si m est impair on définit π_h comme

$$\pi_h f(x, v) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/N_x} \sum_{j \in \mathbb{Z}/N_v} \pi_h^{i+1/2,j+1/2} f(x, v) \chi_{i+1/2,j+1/2}(x, v) \quad (2.64)$$

où

$$\pi_h^{i+1/2,j+1/2} f(x, v) = \pi_h f(x, v)|_{C_{i+1/2,j+1/2}} = \sum_{k=i-(m-1)/2}^{i+(m+1)/2} \sum_{l=j-(m-1)/2}^{j+(m+1)/2} f_{k,l} \ell_k(x) \ell_l(v) \quad (2.65)$$

et si m est pair on définit π_h comme

$$\pi_h f(x, v) = \sum_{i \in \mathbb{Z}/N_x} \sum_{j \in \mathbb{Z}/N_v} \pi_h^{i,j} f(x, v) \chi_{i,j}(x, v) \quad (2.66)$$

où

$$\pi_h^{i,j} f(x, v) = \pi_h f(x, v)|_{C_{i,j}} = \sum_{k=i-m/2}^{i+m/2} \sum_{l=j-m/2}^{j+m/2} f_{k,l} \ell_k(x) \ell_l(v), \quad (2.67)$$

avec $f_{k,l} = f(x_k, v_l)$.

π_h est un opérateur linéaire et continu de $\mathcal{C}^{m+1}(\bar{\Omega}) \cap W^{m+1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$,

dans X_h . Les estimations d'erreur d'interpolation (voir [110], [172]) sont données par

$$\|f - \pi_h f\|_{\mathcal{C}_b^k(\Omega)} \leq Ch^{m+1} \max_{|\alpha|=m+1} \sup_{(x,v) \in \Omega} |D^\alpha f(x, v)|, f \in \mathcal{C}_b^{m+1}(\Omega). \quad (2.68)$$

$$\|f - \pi_h f\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq Ch^{m+1-k} \|f\|_{W^{m+1,p}(\Omega)}, k = 0, 1, f \in W^{m+1,p}(\Omega). \quad (2.69)$$

Remarque 18 *Comme le support en vitesse reste borné pour tout temps fini T alors, par continuité on peut prolonger f à zéro sur $\Omega \setminus [0, L] \times Q(T)$ et périodiser f sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v$.*

2.4.2.2 Opérateurs de transport

Maintenant on introduit quelques opérateurs de transport. Soit $\tau_{h,\xi}$, l'opérateur de translation défini par

$$\tau_{h,\xi} g(t, x, v) = g(t, x - h, v - \xi).$$

Alors on peut définir \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 comme il suit

$$\mathcal{T}_1 g(t, x, v) = \tau_{v\Delta t/2, 0} g(t, x, v) = g(t, x - v\Delta t/2, v),$$

$$\mathcal{T}_2 g(t, x, v) = \tau_{0, \Delta t \tilde{E}} g(t, x, v) = g(t, x, v - \Delta t \tilde{E}(t, x)),$$

où $\tilde{E}(t, x)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{E}}{dx}(t, x) = \int_v \mathcal{T}_1 g(t, x, v) dv - 1 \\ \int_0^L \tilde{E}(t, x) dx = 0. \end{cases} \quad (2.70)$$

Soit $\tilde{\mathcal{T}}_1$ l'opérateur de transport défini par

$$\tilde{\mathcal{T}}_1 g(t, x, v) = \pi_h g(t, x - v\Delta t/2, v) = \pi_h \circ \tau_{v\Delta t/2, 0} g(t, x, v)$$

et $\tilde{\mathcal{T}}_2$ défini de la manière suivante

$$\tilde{\mathcal{T}}_2 g(t, x, v) = \pi_h g(t, x, v - \Delta t \tilde{E}(t, x)) = \pi_h \circ \tau_{0, \Delta t \tilde{E}} g(t, x, v).$$

Finalement on introduit

$$\tilde{\mathcal{T}}_2^* g(t, x, v) = \pi_h g(t, x, v - \Delta t E_h(t, x)) = \pi_h \circ \tau_{0, \Delta t E_h} g(t, x, v),$$

où $E_h(t, x)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{dE_h}{dx}(t, x) = \int_v \tilde{\mathcal{T}}_1 g(t, x, v) dv - 1 \\ \int_0^L E_h(t, x) dx = 0. \end{cases}$$

En introduisant le noyau de Green K , $\tilde{E}(t, x)$ et $E_h(t, x)$ s'écrivent respectivement

$$\tilde{E}(t, x) = \int_0^L K(x, y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{T}_1 g(t, y, v) dv - 1 \right) dy$$

et

$$E_h(t, x) = \int_0^L K(x, y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathcal{T}}_1 g(t, y, v) dv - 1 \right) dy$$

2.4.3 Le schéma numérique

Le schéma numérique est donné par

$$f_h(t^{n+1}, x, v) = \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n, x, v),$$

avec

$$f_h^0 = \pi_h f_0 \text{ une discrétisation de la donnée initiale } f_0,$$

$$f_h^n(x + L, v) = f_h^n(x, v), \quad \forall |v| \leq R$$

la condition aux limites en x et

$$f_h^n(x, v) = 0 \quad \forall |v| > R, \quad \forall x \in [0, L]$$

la condition aux limites en v .

2.4.4 Définitions et notations

Soit f une fonction de $L^2(\Omega)$, périodique sur $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v$ de période Ω . On peut alors décomposer f en somme de modes de Fourier

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{Z}^2} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z} \rangle}.$$

Ici, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_v)$ est un vecteur à deux composantes qui appartient \mathbb{Z}^2 . \mathbf{z} est une abréviation pour (x, v) et \mathbf{k} une abréviation pour (k_x, k_v) . k_x (resp. k_v) prend les valeurs $2\pi\omega_x/L$ (resp. $2\pi\omega_v/(2R)$), ω_x et ω_v étant des entiers. De même on note $\mathbf{N} = (N_x, N_v)$.

Les coefficients de Fourier $\hat{f}(\boldsymbol{\omega})$ sont définis par

$$\hat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \int_{\Omega} d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) e^{-i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z} \rangle}$$

où

$$\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z} \rangle = \frac{2\pi\omega_x}{L}x + \frac{2\pi\omega_v}{2R}v, \quad \int_{\Omega} d\mathbf{z} = \int_0^L \int_{-R}^R dv dx \quad \text{et} \quad |\Omega| = 2LR.$$

On rappelle la relation de Parseval

$$\int_{\Omega} d\mathbf{z} |f(\mathbf{z})|^2 = \sum_{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{Z}^2} \left| \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \right|^2.$$

où

$$\sum_{\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{Z}^2} = \sum_{\omega_x \in \mathbb{Z}} \sum_{\omega_v \in \mathbb{Z}}.$$

De même on notera

$$\sum_{\boldsymbol{\omega}=0}^{\mathbf{N}} = \sum_{\omega_x=0}^{N_x} \sum_{\omega_v=0}^{N_v}.$$

Soit $f = \{f_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathcal{M}_h}$ une fonction grille définie sur \mathcal{M}_h , périodique, de période $2R$ en vitesse et L en espace, appartenant à l'espace $L_h^2(\Omega)$, l'ensemble des fonctions grilles dont la norme $\|\cdot\|_{L_h^2(\Omega)}$ est bornée avec

$$\|f\|_{L_h^2(\Omega)} = \left(\Delta x \Delta v \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} |f_{i,j}|^2 \right)^{1/2}.$$

Comme dans le cas continu on peut définir un produit scalaire discret $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_h^2(\Omega)}$ de la manière suivante. Soit f et g deux fonctions grille de $L_h^2(\Omega)$ alors on définit le produit scalaire $\langle f, g \rangle_{L_h^2(\Omega)}$ comme

$$\langle f, g \rangle_{L_h^2(\Omega)} = \Delta x \Delta v \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} f_{i,j} \overline{g_{i,j}}.$$

Si on définit

$$\phi_{\boldsymbol{\omega}}(x, v) = \phi_{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{z}) = \frac{e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z} \rangle}}{|\Omega|^{1/2}}$$

alors les fonctions $\{\phi_{\boldsymbol{\omega}}\}_{\boldsymbol{\omega}}^{\mathbf{N}}$ forment un système orthonormal sur la grille \mathcal{M}_h pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L_h^2(\Omega)}$, c'est-à-dire

$$\langle \phi_{\boldsymbol{\omega}}, \phi_{\boldsymbol{\nu}} \rangle_{L_h^2(\Omega)} = \delta_{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu}}$$

Si la fonction $\phi = \sum_{\boldsymbol{\omega}=0}^{\mathbf{N}} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \phi_{\boldsymbol{\omega}}$ interpole la fonction f aux points de la grille \mathcal{M}_h alors $f = \phi$ sur \mathcal{M}_h et

$$\langle \phi, \phi_{\boldsymbol{\omega}} \rangle_{L_h^2(\Omega)} = \langle f, \phi_{\boldsymbol{\omega}} \rangle_{L_h^2(\Omega)} = \sum_{\boldsymbol{\nu}=0}^{\mathbf{N}} \widehat{f}(\boldsymbol{\nu}) \langle \phi_{\boldsymbol{\nu}}, \phi_{\boldsymbol{\omega}} \rangle_{L_h^2(\Omega)} = \widehat{f}(\boldsymbol{\omega})$$

où

$$\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} f_{i,j} e^{-i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{i,j} \rangle}, \quad \boldsymbol{\omega} = (0, 0), (1, 0), (0, 1), \dots, \mathbf{N}$$

Evidemment, si $\phi = \sum_{\boldsymbol{\omega}=0}^{\mathbf{N}} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \phi_{\boldsymbol{\omega}}$ interpole la fonction f aux points de la grille \mathcal{M}_h alors

$$f_{i,j} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{\boldsymbol{\omega}=0}^{\mathbf{N}} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{i,j} \rangle}, \quad i = 0, \dots, N_x, \quad j = 0, \dots, N_v$$

On a alors une version discrete de la relation de Parseval

$$\|f\|_{L_h^2(\Omega)}^2 = \Delta x \Delta v \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} |f_{i,j}|^2 = \sum_{\omega=0}^{\mathbf{N}} \left| \widehat{f}(\omega) \right|^2.$$

Les formules (2.4.4) et (2.4.4) sont appelées transformées de Fourier discrete directe et inverse. On pose $\eta_x = N_x/2$ et $\theta_x = 0$ si N_x est pair, et $\eta_x = (N_x - 1)/2$ et $\theta_x = 1$ si N_x est impair. De même on pose $\eta_v = N_v/2$ et $\theta_v = 0$ si N_v est pair, et $\eta_v = (N_v - 1)/2$ et $\theta_v = 1$ si N_v est impair. Au lieu de faire varier ω_x (resp. ω_v) de 0 à N_x (resp. N_v), par un simple changement de variable on fera varier ω_x (resp. ω_v) de $-\eta_x$ (resp. $-\eta_v$) à $\eta_x + \theta_x$ (resp. $\eta_v + \theta_v$). Afin d'alléger les notations, sans perte de généralité on suposera que N_x et N_v sont pairs. On utilisera alors la convention suivante

$$\sum_{|\omega| \leq \mathbf{N}/2} = \sum_{|\omega_x| \leq N_x/2} \sum_{|\omega_v| \leq N_v/2} = \sum_{\omega_x = -N_x/2}^{N_x/2} \sum_{\omega_v = -N_v/2}^{N_v/2}$$

2.4.5 Analyse de convergence

2.4.5.1 Théorème principal

A présent on écrit le théorème principal

Théorème 19 *On suppose que $f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, et que f_0 est positive, périodique par rapport à x de période L , alors la solution approchée du système de Vlasov-Poisson (f_h, E_h) , donnée par le schéma décrit dans la section 2.4.3 converge vers la solution (f, E) du système de Vlasov-Poisson périodique et il existe une constante $C = C(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;\mathcal{C}^{m+1}(\Omega))})$ indépendante de Δt et h telle que*

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right)$$

et

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right)$$

avec $1 \leq m \leq 5$.

2.4.5.2 Idée de la preuve

Là aussi, on cherche à évaluer l'erreur globale au temps t^{n+1}

$$e^{n+1} = \|f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v)\|_{L_h^2(\Omega)},$$

où on décompose $f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v)$ comme il suit

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v) &= f(t^{n+1}, x, v) - \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) \\ &\quad + \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) - \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) \\ &\quad + \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) - \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) \\ &\quad + \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n, x, v) - f_h(t^n, x, v)). \end{aligned}$$

La section suivante décrit l'obtention des estimations des quatre termes de droite de l'équation précédente.

2.4.5.3 Estimations *a priori*

On commence par le lemme suivant qui donne l'erreur de discrétisation en temps du schéma.

Lemme 20 *On suppose que $f \in \mathcal{C}_b^2(0, T; \mathcal{C}_{c, per_x}^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$, alors il existe C telle que*

$$\|f(t^{n+1}) - \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq C \Delta t^3$$

Preuve. D'après le lemme 6 les estimations sur les courbes caractéristiques restent valables si bien que l'on a

$$\sup \left\{ \left| X(t^n) - \tilde{X}(t^n) \right| \mid \forall (x, v) \in [0, L] \times [-R, R] \right\} \leq C \Delta t^3, \quad (2.71)$$

et

$$\sup \left\{ \left| V(t^n; t^{n+1}, x, v) - \tilde{V}(t^n; t^{n+1}, x, v) \right| \mid \forall (x, v) \in [0, L] \times [-R, R] \right\} \leq C \Delta t^3. \quad (2.72)$$

On note

$$X_{k,l}(t^n) = X(t^n; t^{n+1}, x_k, v_l), \quad V_{k,l}(t^n) = V(t^n; t^{n+1}, x_k, v_l).$$

Puisque

$$(\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} - f(t^{n+1}, x_k, v_l) = f(t^n, \tilde{X}_{k,l}(t^n), \tilde{V}_{k,l}(t^n)) - f(t^n, X_{k,l}(t^n), V_{k,l}(t^n)),$$

les estimations (2.71), (2.72) nous permettent d'obtenir l'estimation

$$\|f(t^{n+1}) - \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \Delta t^3.$$

■

On continue avec la proposition suivante

Proposition 21 *On suppose que $f \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}_{c, per_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$, $m \geq 0$ et que π_h est un opérateur linéaire continu d'interpolation de $\mathcal{C}^{m+1}(\Omega)$ dans X_h , alors il existe une constante C telle que pour $i = 1, 2$,*

$$\|\mathcal{T}_i f\|_{L^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))} \leq \|f\|_{L^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))}, \quad (2.73)$$

$$\|\tilde{\mathcal{T}}_i f\|_{L^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))} \leq \|f\|_{L^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))} \quad (2.74)$$

et

$$\left\| (\mathcal{T}_i - \tilde{\mathcal{T}}_i) f \right\|_{L^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))} \leq C h^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{C}^{m+1}(\Omega))}. \quad (2.75)$$

Preuve. Commençons par la preuve de l'estimation (2.73) avec $i = 1$. La preuve pour $i = 2$ étant identique. On pose $\mathbf{d}_{k,l} = (v_l \Delta t / 2, 0)$ alors

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_1 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_v} |f(t, x_k - v_l \Delta t / 2, v_l)|^2 \Delta x \Delta v \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_v} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \sum_{|\boldsymbol{\omega}'| \leq \mathbf{N}/2} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \overline{\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}')} e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}'), \mathbf{z}_{k,l} - \mathbf{d}_{k,l} \rangle} \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_v} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \sum_{|\boldsymbol{\omega}'| \leq \mathbf{N}/2} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \overline{\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}')} e^{i(k_x(\omega_x) - k_x(\omega'_x))(x_k - v_l \Delta t / 2)} e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v))v_l} \\
&= \frac{1}{|2R|} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \sum_{|\boldsymbol{\omega}'| \leq \mathbf{N}/2} \delta_{\omega_x, \omega'_x} e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v))v_l} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \overline{\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}')} \\
&= \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \sum_{|\boldsymbol{\omega}'| \leq \mathbf{N}/2} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \overline{\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}')} \delta_{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}'} \\
&= \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} |\widehat{f}(\boldsymbol{\omega})|^2 = \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Continuons avec la preuve de l'estimation (2.75). En utilisant l'estimation (2.68) on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\mathcal{T}_i - \widetilde{\mathcal{T}}_i \right) f(t) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \|\mathcal{T}_i f(t) - \pi_h \mathcal{T}_i f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq Ch^{m+1} \|\mathcal{T}_i f(t)\|_{\mathcal{E}^{m+1}(\Omega)} \\
&\leq Ch^{m+1} \|f\|_{\mathcal{E}_b(0,T; \mathcal{E}^{m+1}(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'estimation (2.74). La preuve se fait en trois étapes

Première étape

Soit $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ les vecteurs $(\alpha_0, \dots, \alpha_j, \dots, \alpha_{N_v})$ et $(\beta_0, \dots, \beta_i, \dots, \beta_{N_x})$ avec $0 \leq \alpha_j, \beta_i \leq 1$, $\forall (i, j) \in [0, N_x] \times [0, N_v]$. On définit la norme $\|\cdot\|_{L_h^2, \Delta_h^{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}}$ par

$$\|f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}}} = \left(\Delta x \Delta v \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} |f_{i+\alpha_j, j+\beta_i}|^2 \right)^{1/2}.$$

La première étape consiste à calculer $\|\pi_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\boldsymbol{\alpha}, 0}}$ et $\|\pi_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{0, \boldsymbol{\beta}}}$. On pose $\mathbf{N} = (N_x, N_v)$ et $\mathbf{z}_{k,l} = (x_k, v_l)$. Alors en introduisant $f_{k,l}$ à partir de sa décomposition en série de Fourier

$$f_{k,l} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{k,l} \rangle},$$

dans la définition de l'opérateur d'interpolation π_h défini par les équations (2.64)-(2.67) et que l'on peut résumer de la manière suivante

$$\begin{aligned} \pi_h f &= \sum_{i \in \mathbb{Z}/N_x} \sum_{j \in \mathbb{Z}/N_v} \pi_h^{p(i), q(j)} f(\mathbf{z}) \chi_{p(i), q(j)}(\mathbf{z}) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{Z}/N_x} \sum_{j \in \mathbb{Z}/N_v} \sum_{k=i-d_b(m)}^{i+d_e(m)} \sum_{l=j-d_b(m)}^{j+d_e(m)} f_{k,l} \ell_k(x) \ell_l(v) \chi_{p(i), q(j)}(x, v) \end{aligned} \quad (2.76)$$

avec

$$p(i) = \begin{cases} i & \text{si } m \text{ est pair} \\ i + 1/2 & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}, \quad q(i) = \begin{cases} i & \text{si } m \text{ est pair} \\ i + 1/2 & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases},$$

$$d_b(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (m-1)/2 & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}, \quad d_e(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (m+1)/2 & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases},$$

on obtient

$$\begin{aligned} (\pi_h f)_{i+\alpha_j, j} &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{k=i-d_b(m)}^{i+d_e(m)} \sum_{l=j-d_b(m)}^{j+d_e(m)} \widehat{f}(\omega) \ell_k(x_i + \alpha_j \Delta x) \ell_l(v_j) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{k,l} \rangle} \\ &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{k=i-d_b(m)}^{i+d_e(m)} \widehat{f}(\omega) \ell_k(x_i + \alpha_j \Delta x) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{k,j} \rangle} \\ &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\omega| \leq N/2} \widehat{f}(\omega) \varrho(\alpha_j, \omega_x) e^{-i\langle \mathbf{k}(\omega), (d_b, 0) \rangle} e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{i,j} \rangle} \end{aligned} \quad (2.77)$$

où

$$\varrho(\alpha_j, \omega_x) = \sum_{k=0}^m \ell_k((d_b(m) + \alpha_j) \Delta x) e^{ik_x(\omega_x) x_k}.$$

Par conséquent on obtient

$$\begin{aligned} \|\pi_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, 0}}^2 &= \Delta x \Delta v \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} (\pi_h f)_{i+\alpha_j, j} \overline{(\pi_h f)_{i+\alpha_j, j}} \\ &= \frac{\Delta x \Delta v}{|\Omega|} \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{|\omega'| \leq N/2} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{f}(\omega')} \varrho(\alpha_j, \omega_x) \overline{\varrho(\alpha_j, \omega'_x)} \\ &\quad e^{-i\langle \mathbf{k}(\omega) - \mathbf{k}(\omega'), (d_b, 0) \rangle} e^{i\langle \mathbf{k}(\omega) - \mathbf{k}(\omega'), \mathbf{z}_{i,j} \rangle}. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\Delta x}{|L|} \sum_{i=0}^{N_x} e^{i(k_x(\omega_x) - k_x(\omega'_x)) x_i} = \delta_{\omega_x, \omega'_x} \quad (2.78)$$

on obtient

$$\|\pi_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, 0}}^2 = \frac{\Delta v}{|2R|} \sum_{j=0}^{N_v} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{|\omega'_v| \leq N_v/2} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{f}(\omega'_v)} |\varrho(\alpha_j, \omega_x)|^2 e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v)) v_j}$$

Puisqu' on a

$$\frac{\Delta v}{|2R|} \sum_{j=0}^{N_v} e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v))v_j} = \delta_{\omega_v, \omega'_v} \quad (2.79)$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} \|\pi_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, 0}}^2 &\leq \sup\{|\varrho(\alpha, \omega_x)|^2, |\omega_x| \leq N_x/2, 0 \leq \alpha \leq 1\} \\ &\times \frac{\Delta v}{|2R|} \sum_{j=0}^{N_v} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{|\omega'_v| \leq N_v/2} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{f}(\omega_x, \omega'_v)} e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v))v_j} \\ &\leq \sup\{|\varrho(\alpha, \omega_x)|^2, |\omega_x| \leq N_x/2, 0 \leq \alpha \leq 1\} \sum_{|\omega| \leq N/2} |\widehat{f}(\omega)|^2 \\ &\leq \sup\{|\varrho(\alpha, \omega_x)|^2, |\omega_x| \leq N_x/2, 0 \leq \alpha \leq 1\} \|f\|_{L_h^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

De la même manière on montre que

$$\|\pi_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{0, \beta}}^2 \leq \sup\{|\varrho(\beta, \omega_v)|^2, |\omega_v| \leq N_v/2, 0 \leq \beta \leq 1\} \|f\|_{L_h^2(\Omega)}^2$$

L'objet de la deuxième étape est de montrer que

$$\sup\{|\varrho(\alpha, \omega_x)|^2, 0 \leq \alpha \leq 1, |\omega_x| \leq N/2\} \leq 1. \quad (2.80)$$

et que

$$\sup\{|\varrho(\beta, \omega_v)|^2, 0 \leq \beta \leq 1, |\omega_v| \leq N/2\} \leq 1. \quad (2.81)$$

où

$$\varrho(\alpha, \omega_x) = \sum_{k=0}^m \ell_k((d_b + \alpha)\Delta x) e^{ik_x x_k}$$

et

$$\varrho(\beta, \omega_v) = \sum_{l=0}^m \ell_l((d_b + \beta)\Delta v) e^{ik_v v_l}.$$

On définit ϱ_{sup} par

$$\varrho_{sup} = \sup\{|\varrho(\mu, \omega)|, 0 \leq \mu \leq 1, \omega \in \mathbb{Z}\}$$

Deuxième étape

Maintenant on cherche à montrer que ϱ_{sup} est inférieur ou égal à un. Sans perte de généralité on peut supposer que $L = 2R = 2\pi$, et que $\Delta x = \Delta v = \Delta y$, de telle sorte qu'il reste à prouver que

$$\sup\{|\varrho(y, \omega)|, y \in [-\Delta y(m-1)/2, \Delta y(m+1)/2], \omega \in \mathbb{Z}\} \leq 1.$$

où

$$\varrho(y, \omega) = \sum_{k=0}^m \ell_k(y) e^{i\omega y_k}. \quad (2.82)$$

On pose $\theta = \omega \Delta y$ et $y = \eta \Delta y$, avec $0 \leq \eta \leq m$. Alors on introduit la base de Newton

$$L_m g(y) = \sum_{k=0}^m \ell_k^m(y) g(y_k) = \sum_{k=0}^m D_k [(y_0, \dots, y_k); g] \varpi_k(y)$$

où

$$\varpi(y) = \prod_{i=0}^{i=k} (y - y_i) = (y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_k)$$

et

$$D_k [(y_0, \dots, y_k); g] = \frac{(\Delta^k g)_k}{k! (\Delta y)^k} \quad (2.83)$$

avec

$$\Delta^n g_k = \Delta (\Delta^{n-1} g)_k, \quad \Delta g_{k+1} = g(y_{k+1}) - g(y_k), \quad \Delta^0 g_k = g(y_k).$$

On remarque que (2.83) peut se récrire comme

$$D_k [(y_0, \dots, y_k); g] = \frac{1}{k! (\Delta y)^k} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i g(y_i) \quad (2.84)$$

où $C_k^i = k! / (i!(k-i)!)$.

Grâce à (2.84) on écrit

$$\varrho(y, \omega) = L_m e^{i\omega y} = \sum_{k=0}^m \ell_k(y) e^{i\omega y_k} \quad (2.85)$$

$$= \sum_{k=0}^m D_k [(y_0, \dots, y_k); e^{i\omega y}] \varpi_k(y) \quad (2.86)$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{1}{k! (\Delta y)^k} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} C_k^j e^{ij\theta} \varpi_k(y) \quad (2.87)$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{(e^{i\theta} - 1)^k}{k! (\Delta y)^k} \varpi_k(y) \quad (2.88)$$

$$= \sum_{k=0}^m \frac{(e^{i\theta} - 1)^k}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (\eta - l) \quad (2.89)$$

$$= \varrho(\eta, \theta). \quad (2.90)$$

Comme $\varrho(\eta, \theta)$ est périodique en θ , maintenant on doit montrer que

$$\sup \{ |\varrho(\eta, \theta)|, \eta \in [(m-1)/2, (m+1)/2], \theta \in [0, 2\pi] \} \leq 1.$$

Si on trace $|\varrho(\eta, \theta)|$ on observe que

$$(IS) \quad |\varrho(\eta, \theta)| \leq \begin{cases} 1 & \forall \theta \in [0, 2\pi], \eta \in [\frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2} + 1] & m \text{ pair} \\ 1 & \forall \theta \in [0, 2\pi], \eta \in [\frac{m-1}{2}, \frac{m-1}{2}] & m \text{ impair} \end{cases}$$

A présent on va prouver l'inégalité précédente jusqu'à l'ordre 5. On donne ici la philosophie de la preuve car elle prend quelques pages de calculs. En fait cette démarche peut être utilisée pour n'importe quel ordre, cependant le volume de calculs devient trop important. En fait on prend la relation

$$\varrho(\eta, \theta) = \sum_{k=0}^m \frac{(e^{i\theta} - 1)^k}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (\eta - l) \quad (2.91)$$

que l'on multiplie par son conjugué $\bar{\varrho}(\eta, \theta)$. Après avoir rassemblé chaque terme et son conjugué on obtient un polynôme réel en $\cos(\theta)$ et η . On fait alors le changement de variables $\xi = 1 - \cos \theta$, $\zeta = \eta - m/2$. D'abord on factorise l'expression par rapport à la variable ξ et ensuite on factorise par rapport à la variable ζ . On trouve alors

$$\begin{aligned} |\varrho_1(\zeta, \xi)|^2 &= 1 - 2\xi \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \\ |\varrho_2(\zeta, \xi)|^2 &= 1 - 2\xi^2 \zeta^2 (1 - \zeta^2) \\ |\varrho_3(\zeta, \xi)|^2 &= 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \xi^2 \left[3 + 2\xi \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \right] / 9 \\ |\varrho_4(\zeta, \xi)|^2 &= 1 - \zeta^2 (1 - \zeta^2) (2^2 - \zeta^2) \xi^3 [4 + \xi (1 - \zeta^2)] / 36 \\ |\varrho_5(\zeta, \xi)|^2 &= 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \xi^3 \times \\ &\quad \left[20 + 15\xi \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) + 2\xi^2 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \right] / 900 \end{aligned}$$

ce qui justifie l'inégalité (IS) pour $m = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

En faisant le calcul jusqu'à l'ordre cinq on observe qu'il existe une structure de récurrence mais il ne semble pas aisé de la démontrer excepté numériquement. En effet on fait la conjecture suivante

$$\begin{aligned} |\varrho_{2l}(\zeta, \xi)|^2 &= 1 - \zeta^2 (1 - \zeta^2) \times \dots \times (l^2 - \zeta^2) \xi^{l+1} \times \\ &\quad \left[c_0 + c_1 \xi (1 - \zeta^2) + \dots + c_{l-1} \xi^{l-1} (1 - \zeta^2) \times \dots \times ((l-1)^2 - \zeta^2) \right], \\ &\quad m = 2l, \\ |\varrho_{2l+1}(\zeta, \xi)|^2 &= 1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \times \dots \times \left(\left(\frac{2l+1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \xi^{l+1} \times \\ &\quad \left[d_0 + d_1 \xi \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) + \dots + d_l \xi^l \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \times \dots \times \left(\left(\frac{2l-1}{2}\right)^2 - \zeta^2 \right) \right], \\ &\quad m = 2l + 1. \end{aligned}$$

avec $c_i \geq 0, \forall i \in \{0, \dots, l-1\}$ et $d_i \geq 0, \forall i \in \{0, \dots, l\}$. La démonstration de cette conjecture est en cours de développement.

Troisième étape

Montrons maintenant que pour $i = 1, 2$ les estimations

$$\|\tilde{\mathcal{T}}_i f\|_{L^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))} \leq \|f\|_{L^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))}.$$

sont vraies. Pour $i = 1$ on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{T}}_1 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \|\pi_h \mathcal{T}_1 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq \|\pi_h \mathcal{T}_1 f(t)\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, 0}} \\ &\leq \|\mathcal{T}_1 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \end{aligned}$$

et pour $i = 2$ on a

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathcal{T}}_2 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \|\pi_h \mathcal{T}_2 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq \|\pi_h \mathcal{T}_2 f(t)\|_{L_h^2, \Delta_h^{0, \beta}} \\ &\leq \|\mathcal{T}_2 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition. ■

Le prochain lemme donne l'erreur de discrétisation en espace du schéma numérique .

Lemme 22 *On suppose que $f \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}_{c, per_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ et que π_h est un opérateur linéaire continu d'interpolation de $\mathcal{C}^{m+1}(\Omega)$ dans X_h , alors il existe une constante C telle que*

$$\left\| \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq Ch^{m+1}$$

Preuve. La preuve se fait aisément en reprenant la philosophie de la démonstration du lemme 8 et les estimations de la proposition 21 . ■

On continue avec l'estimation de l'erreur de couplage non linéaire entre l'équation de Vlasov et de Poisson.

Lemme 23 *On suppose que $f \in L^\infty(0, T; \mathcal{C}_{c, per_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$ et que π_h est un opérateur linéaire continu d'interpolation de $\mathcal{C}^{m+1}(\Omega)$ dans X_h , alors il existe une constante C telle que*

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq C\Delta t (e^n + h^{m+1})$$

où

$$e^n = \|f(t^n) - f_h(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)}.$$

Preuve. Commençons par montrer qu'il existe une constante C_s indépendante de h tel que

$$\|\pi_h f(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C_s \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)}. \quad (2.92)$$

On donne la preuve seulement pour l'ordre pair, car la même conclusion peut être déduite pour l'ordre impair. Puisque $\ell_k \in L^\infty(\mathbb{R})$ et comme les fonctions de base ℓ_k sont à support compact (elles sont prolongées par zéro en dehors de leur support) il existe une constante M tel que

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_k |\ell_k(z)|^q \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} &\leq \sup_{i \in \mathbb{Z}} \left\| \sum_k |\ell_k(z)|^q \right\|_{L^\infty(\Delta z_i)} \\
&\leq (m+1) \sup_{i \in \mathbb{Z}} \max_{k \in \{0, \dots, m\}} \|\ell_k(z)\|_{L^\infty(\Delta z_i)}^q \\
&\leq M.
\end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}
\|\pi_h f(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |\pi_h f|^2 dx dv \\
&\leq \sum_i \sum_j \int_{C_{i,j}} |\pi_h^{i,j} f(x, v)|^2 dx dv \\
&\leq \sum_i \sum_j \int_{C_{i,j}} \left| \sum_{k=i-m/2}^{i+m/2} \sum_{l=j-m/2}^{j+m/2} f_{k,l} \ell_k(x) \ell_l(v) \right|^2 dx dv \\
&\leq \sum_i \sum_j \sum_{k=i-m/2}^{i+m/2} \sum_{l=j-m/2}^{j+m/2} |f_{k,l}|^2 \int_{C_{i,j}} \sum_{k=i-m/2}^{i+m/2} \sum_{l=j-m/2}^{j+m/2} |\ell_k(x)|^2 |\ell_l(v)|^2 dx dv \\
&\leq (m+1)^2 M^2 \sum_i \sum_j |f_{i,j}|^2 \Delta x \Delta v \\
&\leq (m+1)^2 M^2 \|f\|_{L_h^2}^2,
\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve de (2.92).

Par ailleurs on peut écrire

$$(\tilde{\mathcal{T}}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2^*)g(t^n) = \pi_h \left(g(t^n, x, v - \Delta t \tilde{E}^{n+1/2}(x)) - g(t^n, x, v - \Delta t E_h^{n+1/2}(x)) \right).$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
&\left| g(t^n, x, v - \Delta t \tilde{E}^{n+1/2}(x)) - g(t^n, x, v - \Delta t E_h^{n+1/2}(x)) \right| \\
&\leq \Delta t \left| \tilde{E}^{n+1/2}(x) - E_h^{n+1/2}(x) \right| \|\nabla g(t^n)\|_{L^\infty(Q)}.
\end{aligned}$$

où $\tilde{E}^{n+1/2}(x)$ et $E_h^{n+1/2}(x)$ peuvent se récrire comme

$$\tilde{E}^{n+1/2}(x) = \int_0^L K(x, y) \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{T}_1 f(t, y, v) dv - 1 \right) dy,$$

$$E_h^{n+1/2}(x) = \int_0^L K(x, y) \left(\int_{\mathbb{R}} \tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t, y, v) dv - 1 \right) dy.$$

Alors on écrit

$$\begin{aligned}
E_h^{n+1/2}(x) - \tilde{E}^{n+1/2}(x) &= \int_0^L K(x, y) \left(\int_{\mathbb{R}} \left[\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n, y, v) - \mathcal{T}_1 f(t^n, y, v) \right] dv \right) dy, \\
&= \int_0^L K(x, y) \left(\int_{|v| \leq Q(T)} \pi_h \left[f_h(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) - f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) \right] dv \right) dy \\
&+ \int_0^L \int_{|v| > Q(T)} K(x, y) f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) dv dy \\
&+ \int_0^L \int_{|v| \leq Q(T)} K(x, y) \left(\pi_h f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) - f(t^n, y - v \frac{\Delta t}{2}, v) \right) dv dy,
\end{aligned}$$

de telle sorte que l'on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| E_h^{n+1/2} - \tilde{E}^{n+1/2} \right\|_{L^2([0, L])} &\leq \sqrt{LQ(T)} \|K\|_{L^\infty} \|\pi_h [\mathcal{T}_1 f_h(t^n) - \mathcal{T}_1 f(t^n)]\|_{L^2(\Omega)} \\
&+ LQ(T) \|K\|_{L^\infty} \|\pi_h \mathcal{T}_1 f(t^n) - \mathcal{T}_1 f(t^n)\|_{L^\infty(\Omega)},
\end{aligned} \tag{2.93}$$

et à partir de (2.73), (2.92) et (2.68)

$$\begin{aligned}
\left\| E_h^{n+1/2} - \tilde{E}^{n+1/2} \right\|_{L^2([0, L])} &\leq C_s \sqrt{LQ(T)} \|K\|_{L^\infty} \|\mathcal{T}_1 f_h(t^n) - \mathcal{T}_1 f(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&+ LQ(T) \|K\|_{L^\infty} h^{m+1} \|\mathcal{T}_1 f\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{C}^{m+1}(\Omega))}, \\
&\leq C_s \sqrt{LQ(T)} \|K\|_{L^\infty} \|f_h(t^n) - f(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&+ LQ(T) \|K\|_{L^\infty} h^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0, T; \mathcal{C}^{m+1}(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

Finalement on obtient

$$\left\| E_h^{n+1/2} - \tilde{E}^{n+1/2} \right\|_{L^\infty([0, L])} \leq C (e^n + h^{m+1}),$$

et par suite

$$\left\| (\tilde{\mathcal{T}}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2^*) g(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq C |\Omega| \Delta t (e^n + h^{m+1}) \|\nabla g(t^n)\|_{L^\infty(\Omega)} \tag{2.95}$$

En utilisant (2.74) et (2.95) on trouve

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ (\tilde{\mathcal{T}}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2^*) \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq C \left\| (\tilde{\mathcal{T}}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2^*) \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(Q)} \\
&\leq C \Delta t (e^n + h^{m+1}) \left\| \nabla (\tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n)) \right\|_{L^\infty(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Maintenant on estime le terme $\left\| \nabla(\tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n)) \right\|_{L^\infty(\Omega)}$. Pour cela on procède de la manière suivante. A partir de l'erreur d'interpolation (2.69) on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \nabla(\tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n)) \right\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \left\| \nabla(\pi_h f(t^n, x - v\Delta t/2, v)) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq \left\| \nabla[(\pi_h f - f)(t^n, x - v\Delta t/2, v)] \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\quad + \left\| \nabla(f(t^n, x - v\Delta t/2, v)) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq h^m \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(\Omega))} + \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(\Omega))} \\ &\leq C \|f\|_{L^\infty(0,T;W^{m+1,\infty}(\Omega))}. \end{aligned}$$

et finalement on se retrouve avec

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ (\tilde{\mathcal{T}}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2^*) \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq C\Delta t (e^n + h^{m+1})$$

ce qui clôt la preuve. ■

Maintenant on énonce le lemme établissant la stabilité L^2 du schéma numérique.

Lemme 24 Soit π_h un opérateur d'interpolation continu de $\mathcal{C}^{m+1}(\Omega)$ dans X_h alors on a

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq e_n. \quad (2.96)$$

Preuve. En utilisant les estimations (2.74) alors on a de manière évidente

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq \|f(t^n) - f_h(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. ■

Maintenant on peut retourner à la preuve du théorème 19.

Preuve du théorème 19. On cherche à évaluer l'erreur globale au temps t^{n+1}

$$e^{n+1} = \|f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v)\|_{L_h^2(\Omega)}.$$

On fait la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, x, v) - f_h(t^{n+1}, x, v) &= f(t^{n+1}, x, v) - \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) \quad (2.97) \\ &\quad + \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) - \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n, x, v) \\ &\quad + \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^* \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n, x, v) - f_h(t^n, x, v)). \end{aligned}$$

Finalement grâce aux lemmes 20, 22, 23 et 24 on obtient l'estimation

$$e^{n+1} \leq (1 + C\Delta t)e^n + C(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;\mathcal{C}^{m+1}(\Omega))}) (\Delta t^3 + h^{m+1} + h^{m+1}\Delta t).$$

Une inégalité de Grönwall discrète nous permet d'obtenir l'estimation

$$e^{n+1} \leq \exp(CT)e^0 + C \left(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;\mathcal{C}^{m+1}(\Omega))} \right) \left(\Delta t^2 + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} + h^{m+1} \right).$$

Puisque e^0 est juste une erreur d'interpolation fixe que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut on obtient

$$e^n \leq C \left(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;\mathcal{C}^{m+1}(\Omega))} \right) \left(\Delta t^2 + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} + h^{m+1} \right).$$

Finalement grâce à (2.92) et (2.68) on obtient

$$\begin{aligned} \|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \|\pi_h(f - f_h)\|_{l^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\pi_h f - f\|_{l^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq C_s e^n + C h^{m+1} \|f\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{C}^{m+1}(\Omega))} \\ &\leq C \left(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;\mathcal{C}^{m+1}(\Omega))} \right) \left(\Delta t^2 + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} + h^{m+1} \right) \end{aligned}$$

Afin de montrer la convergence du champ électrique on majore

$$\|E(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2}\|_{L^\infty([0,L])}.$$

Pour estimer ce terme on procède comme cela a été fait dans la preuve du lemme 6 et 23. On déduit que

$$\|\tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2}\|_{L^\infty([0,L])} \leq C \left(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;\mathcal{C}^{m+1}(\Omega))} \right) \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right),$$

et que

$$\|E(t^{n+1/2}) - \tilde{E}(t^{n+1/2})\|_{L^\infty([0,L])} \leq O(\Delta t^2),$$

de telle sorte que l'on conclut par

$$\|E(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2}\|_{L^\infty([0,L])} \leq C \left(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;\mathcal{C}^{m+1}(\Omega))} \right) \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right).$$

■

Remarque 25 *On peut remarquer que notre analyse de convergence peut s'étendre à des formules de splitting d'ordre plus élevé et prouver la convergence pour des ordres $N \geq 3$ en temps. Afin de construire une approximation d'ordre N en temps (cf [215, 90, 102]) on considère des schémas de splitting de la forme*

$$f(t+\Delta t) = \mathcal{T}_x^{\alpha_1}(\Delta t) \circ \mathcal{T}_v^{\beta_1}(\Delta t) \circ \dots \circ \mathcal{T}_x^{\alpha_i}(\Delta t) \circ \mathcal{T}_v^{\beta_i}(\Delta t) \circ \dots \circ \mathcal{T}_x^{\alpha_k}(\Delta t) \circ \mathcal{T}_v^{\beta_k}(\Delta t) f(t)$$

où

$$\mathcal{T}_x^{\alpha_i}(\Delta t) = \exp(\alpha_i \Delta t \mathcal{L}_x), \quad \mathcal{T}_v^{\beta_i}(\Delta t) = \exp(\beta_i \Delta t \mathcal{L}_v),$$

avec

$$\mathcal{L}_x = -v \cdot \partial_x, \quad \mathcal{L}_v = -E \cdot \partial_v.$$

L'action de $\mathcal{T}_x^{\alpha_i}(\Delta t)$ et $\mathcal{T}_v^{\beta_i}(\Delta t)$ sur une fonction $g(x, v)$ est donnée par

$$\mathcal{T}_x^{\alpha_i}(\Delta t)g(x, v) = g(x - \alpha_i v \Delta t, v), \quad \mathcal{T}_v^{\beta_i}(\Delta t)g(x, v) = g(x, v - \beta_i E(t, x) \Delta t).$$

Remarque 26 Cette analyse de stabilité nous donne une information très précieuse si on l'interprète en terme d'éléments finis. En effet si on considère un élément fini de Lagrange à une dimension d'ordre m on aura la stabilité en norme L^2 dans une zone située au centre de l'élément. Plus précisément on aura stabilité L^2 sur l'intervalle $[\frac{m}{2} - 1, \frac{m}{2} + 1]$ si m est pair et sur l'intervalle $[\frac{m-1}{2}, \frac{m+1}{2}]$ si m est impair. Si le choix de tels intervalles pour obtenir une interpolation stable a été suggéré par plusieurs auteurs [132, 81, 120] il n'existe à ce jour du moins à ma connaissance aucune preuve rigoureuse de ce résultat excepté celle que nous avons donnée ici pour $1 \leq m \leq 5$. La démonstration pour un ordre quelconque est en cours de réalisation. On constate que pour un élément fini de degré inférieur ou égal à deux l'intervalle de stabilité se confond avec tout l'élément fini. Par contre pour des éléments finis d'ordre supérieur à trois l'interpolation n'est pas L^2 -stable sur tout l'élément. Bien que l'analyse de Fourier ne puisse pas se faire sur des maillages non structurés comme une triangulation, on peut supposer que ce résultat peut se généraliser. En effet les simulations numériques effectuées sur des maillages non structurés (triangulation) ont montré qu'avec des opérateurs d'interpolation de Lagrange (définis sur un treillis) de degrés supérieur ou égal à trois la solution du schéma numérique explose. La reconstruction de la fonction de distribution à partir d'opérateurs de Lagrange d'ordre supérieur ou égal à trois définis sur un treillis fournit un schéma instable. Dans le cas d'une grille on peut retrouver la stabilité L^2 car on construit l'élément fini autour de l'intervalle où est localisée l'origine de la caractéristique en s'arrangeant pour que cet intervalle soit contenu dans l'intervalle de stabilité. On peut dire en quelque sorte que l'on construit des éléments finis variables. Cependant cette technique est difficilement utilisable pour des maillages non structurés car d'une part on ne connaît pas la zone de stabilité contenue dans l'élément (ici un triangle) et d'autre part même si on savait déterminer cette zone de stabilité, comme le maillage est fixe on ne peut pas contrôler l'endroit où tombe l'origine de la trajectoire. On pourrait imaginer qu'à chaque itération on construise un maillage qui rende stable l'opérateur d'interpolation défini à partir de ce même maillage. En effet pour chaque triangle père du maillage il faudrait définir un triangle fils dont la région de stabilité contient le triangle père. Ainsi l'opérateur d'interpolation sur le triangle père serait défini comme la restriction sur le triangle père de l'opérateur d'interpolation défini à partir du triangle fils. Cependant cela semble trop coûteux. Aussi est-il plus judicieux de considérer d'autres opérateurs d'interpolation ayant de meilleures propriétés de stabilité comme les opérateurs de type Hermite qui font intervenir la valeur du gradient de la fonction de distribution. Ceci sera l'objet du prochain chapitre.

Remarque 27 Reprenons l'expression (2.91) qui s'écrit

$$\varrho(\eta, \xi) = \sum_{k=0}^m \frac{(e^{i\xi} - 1)^k}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (\eta - l).$$

On sait que le module de $\varrho(\eta, \xi)$ atteint son maximum pour $\xi = 0$. Supposons

que $|e^{i\xi} - 1| < 1$, ce qui est le cas lorsque $|\xi| \leq \pi/3$. Alors la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{i\xi} - 1)^k}{k!} \prod_{l=0}^{k-1} (\eta - l)$$

est convergente et est égale à $e^{i\xi\eta}$. Aussi on peut écrire

$$\varrho(\eta, \xi) = e^{i\xi\eta} + O(|\xi|^{m+1})$$

et par suite

$$\mathcal{Q}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{z}) = e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{z} \rangle} + O(|\boldsymbol{\xi}|^{m+1})$$

avec $\mathbf{z} = (d_b(m) + \alpha, d_b(m) + \beta)$. En prenant le module de $\mathcal{Q}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{z})$ il vient

$$|\mathcal{Q}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{z})| = 1 + O(|\boldsymbol{\xi}|^{m+1}).$$

Mais comme $|\mathcal{Q}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{z})| \leq 1$ on a en fait l'estimation

$$|\mathcal{Q}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{z})| = 1 - O(|\boldsymbol{\xi}|^{m+1})$$

ou autrement dit, il existe une constant $\delta > 0$ indépendante de $\boldsymbol{\omega}$ et de \mathbf{z} telle que

$$|\mathcal{Q}(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{z})| \leq 1 - \delta |\boldsymbol{\xi}|^{m+1} \quad (2.98)$$

On retrouve cette inégalité (2.98) dans la théorie de la convergence des schémas aux différences finies pour les équations hyperboliques et paraboliques. En effet si un schéma aux différences finies est consistant d'ordre $2r - 2$ et dissipatif d'ordre $2r$ alors il est stable. Or un schéma dissipatif d'ordre $2r$ signifie que le module du symbole du schéma (obtenu par transformation de Fourier du schéma aux différences finies) vérifie l'inégalité (2.98) où $m + 1$ doit être remplacé par $2r$ et \mathcal{Q} par le symbole du schéma aux différences finies. Pour plus de détails voir le livre de Gustafsson-Kreiss-Oliger [109].

2.4.6 Autres résultats

2.4.6.1 Reconstruction par B-splines

Dans cette section on prouve la convergence des schémas semi-Lagrangiens lorsqu'on considère l'interpolation par B-splines pour reconstruire la fonction de distribution. Tout d'abord on définit l'espace des B-splines d'ordre $m + 1$, et l'espace d'approximation X_h .

Soit m et r deux entiers positifs, alors on définit $\mathcal{S}_{m+1, \Delta_x}$, l'espace linéaire des fonctions B-splines d'ordre $m + 1$ sur $[0, L]$ comme

$$\mathcal{S}_{m+1, \Delta_x} = \{s(x) \in \mathcal{C}^{m-1}([0, L]), D^{m+1}s(x) = 0, \forall x \in (x_i, x_{i+1}), \forall i \in \{0, \dots, N_x - 1\}\}$$

De manière similaire on définit $\mathcal{S}_{r+1, \Delta_v}$, l'espace des fonctions B-spline d'ordre $r + 1$ sur $[-R, R]$. Ensuite on définit l'espace des fonctions B-spline à deux dimensions comme le produit tensoriel des espace $\mathcal{S}_{m+1, \Delta_x}$ et $\mathcal{S}_{r+1, \Delta_v}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{m+1, r+1, \Delta_x, \Delta_v}(\Omega) &= \mathcal{S}_{m+1, \Delta_x} \otimes \mathcal{S}_{r+1, \Delta_v} \\ &= \{s(x, v) = s_1(x)s_2(v) : s_1 \in \mathcal{S}_{m+1, \Delta_x}, s_2 \in \mathcal{S}_{r+1, \Delta_v}\}. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on a l'inclusion

$$\mathcal{S}_{m+1,r+1,\Delta_x,\Delta_v}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$$

avec $k = \min(r, m)$ et $1 \leq p \leq \infty$. Parfois on définit h comme $h = \max\{\Delta x, \Delta v\}$ et parfois on notera par h un paramètre générique de discrétisation du domaine Ω . On suppose $r = m$ et on notera $\mathcal{S}_{m+1,h}(\Omega)$ l'espace des fonctions splines à deux dimensions d'ordre $m + 1$ sur Ω . Alors X_h est défini par

$$X_h = \{f \in \mathcal{C}^{m-1}(\Omega), f \in \mathcal{S}_{m+1,h}(\Omega)\},$$

et l'opérateur d'interpolation π_h est défini par

$$\pi_h f = \sum_{i \in \mathbb{Z}/N_x} \sum_{j \in \mathbb{Z}/N_v} \gamma_{i,j}(f) B^{m+1}(x/\Delta x - i) B^{m+1}(v/\Delta v - j) \quad (2.99)$$

où la B-spline unidimensionnelle d'ordre m , B^m , est définie récursivement par

$$B^m(\cdot) = \underbrace{(B * \dots * B)}_{m \text{ fois}}(\cdot) = \int B^{m-1}(u - \cdot) B(u) du. \quad (2.100)$$

avec

$$B^1(u) = B(u) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq u \leq 1/2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.101)$$

Les coefficients $\gamma_{i,j}(f)$ sont solutions du système linéaire suivant

$$f_{i,j} = f(x_i, v_j) = \sum_{k,l} \gamma_{k,l}(f) B^{m+1}(i-k) B^{m+1}(j-l) \quad i \in [0, N_x-1], j \in [0, N_v-1]. \quad (2.102)$$

Maintenant on rappelle quelques propriétés sur l'interpolation B-splines.

i)

$$\mathcal{S}_{m+1,h}(\Omega) = \text{vect} \{B^{m+1}(\cdot/\Delta x - i) B^{m+1}(\cdot/\Delta v - j)\}_{i,j=0}^{N_x-1, N_v-1} \quad (2.103)$$

ii)

$$\mathcal{S}_{m+1,h}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \quad 1 \leq p \leq \infty \quad 0 \leq k \leq m \quad (2.104)$$

iii) stabilité :

$$\|\pi_h f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall f \in L^p(\Omega) \quad (2.105)$$

iv) Consistance et précision optimale : Pour $1 \leq p \leq \infty$ et $0 \leq k \leq m$

$$\|\pi_h f - f\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq Ch^{m+1-k} |f|_{W^{m+1,p}(\Omega)}, \quad \forall f \in W^{m+1,p}(\Omega) \quad (2.106)$$

v) La matrice $\left[\sum_{k,l} B^{m+1}(i-k) B^{m+1}(j-l) \right]_{i,j=1}^{N_x-1, N_v-1}$ est définie positive si bien que la solution du système linéaire (2.102) existe et est unique.

vi)

$$\sum_i B^m(\cdot/h - i) = 1, \quad \int B^m(u) du = 1 \quad (2.107)$$

vii) Si m est pair la B-spline $B_i^m(\cdot) = B^m(\cdot/h - i)$ est construite sur les points $\{x_{i-m/2}, \dots, x_{i+m/2}\}$ et si m est impair $B_i^m(\cdot)$ est construite sur les points $\{t_{i-(m-1)/2}, \dots, t_{i+(m+1)/2}\}$ où

$$t_k = \frac{x_{k-(m+1)/2} + \dots + x_{k+(m-1)/2}}{m+1}$$

viii) Si $m = 2r + 2$, l'interpolation par B-splines peut être vue comme un problème de minimisation. En effet soit $f \in \mathcal{C}^r$ et les points $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1} = b$, alors la fonction spline, $\pi_h f \in \mathcal{C}^{2r} \cap \mathcal{S}_{2r+2,h}([a, b])$ est solution du problème de minimisation suivant :

$$\pi_h f = \arg \min_{\substack{g \in \mathcal{C}^{2r} \\ g \neq 0}} \left(\int_a^b \left| \frac{\partial^{r+1} g}{\partial x^{r+1}} \right|^2 dx \right)^{1/2}$$

sous les contraintes d'interpolation

$$(\pi_h f)(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, k+1$$

$$\text{splines complètes} \begin{cases} (\pi_h f)^{(j)}(a) = f^{(j)}(a), & j = 1, \dots, r \\ (\pi_h f)^{(j)}(b) = f^{(j)}(b), & j = 1, \dots, r \end{cases}$$

$$\text{splines naturelles} \begin{cases} (\pi_h f)^{(j)}(a) = (\pi_h f)^{(j)}(b) = 0, & j = r+1, \dots, 2r \end{cases}$$

$$\text{splines périodiques} \begin{cases} (\pi_h f)^{(j)}(a) = (\pi_h f)^{(j)}(b) & j = 0, \dots, 2r \end{cases}$$

Le schéma numérique est le même que celui décrit dans la section 2.4.3, à ceci près que l'on remplace l'opérateur d'interpolation défini à partir des fonctions de Lagrange par l'opérateur d'interpolation défini à partir des fonctions B-splines. Maintenant on énonce le théorème.

Théorème 28 *Supposons $f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, positive, périodique par rapport à x de période L , alors la solution numérique du système de Vlasov-Poisson (f_h, E_h) , donnée par le schéma exposé dans la section 2.4.3, où π_h est défini à partir des B-splines d'ordre $m+1$, converge vers la solution périodique (f, E) du système de Vlasov-Poisson et il existe une constante $C = (\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;\mathcal{C}^{m+1}(\Omega))})$ indépendante de $\Delta t, h$ telle que*

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m-2} + \frac{h^{m-2}}{\Delta t} \right)$$

et

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^\infty([0,L]))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m-2} + \frac{h^{m-2}}{\Delta t} \right)$$

Preuve. Si on remplace l'opérateur π_h défini à partir des fonctions de Lagrange par l'opérateur π_h défini par les fonctions B-splines, alors toutes les estimations restent valables sauf les estimations (2.92) et (2.74). Maintenant il s'agit de montrer que

$$\|\pi_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)} + O(h^{m-2}) \quad (2.108)$$

et

$$\|\tilde{\mathcal{T}}_i f\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)} + O(h^{m-2}) \quad (2.109)$$

où π_h est défini par (2.99). Afin de prouver l'estimation (2.108) on utilise encore l'analyse de Fourier. Soit Δ_h une grille à deux dimensions dans l'espace des phases. h est un paramètre générique de discrétisation qui désigne Δx ou Δv . On appelle $\Delta_h^{\mu,\eta}$ la grille translatée de $\mu\Delta x$ dans la direction x et de $\eta\Delta v$ dans la direction v , où $0 \leq \mu \leq 1$ et $0 \leq \eta \leq 1$. On définit alors la norme $\|\cdot\|_{L_h^2, \Delta_h^{\mu,\eta}}$ de la manière suivante :

$$\|f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\mu,\eta}} = \left(\Delta x \Delta v \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} |f_{i+\mu, j+\eta}|^2 \right)^{1/2}$$

où $f_{i+\alpha, j+\beta} = f(x_i + \alpha\Delta x, v_j + \beta\Delta v)$.

En substituant

$$f_{i,j} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{i,j} \rangle}$$

et

$$\gamma_{k,l} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \hat{\gamma}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{k,l} \rangle}$$

à $f_{i,j}$ et $\gamma_{k,l}$ dans (2.102) et en introduisant les notations

$$\boldsymbol{\alpha}_{i,j} = (i, j), \quad \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\omega}) = (\xi_x(\omega_x), \xi_v(\omega_v)) = (k_x(\omega_x)\Delta x, k_v(\omega_v)\Delta v)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{i,j} \rangle} &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{k,l} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \hat{\gamma}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{k,l} \rangle} B^{m+1}(i-k) B^{m+1}(j-l) \\ &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{k,l} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \hat{\gamma}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{i,j} \rangle} e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\omega}), \boldsymbol{\alpha}_{i,j} - \boldsymbol{\alpha}_{k,l} \rangle} B^{m+1}(i-k) B^{m+1}(j-l) \\ &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{p,q} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \hat{\gamma}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{i,j} \rangle} e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\omega}), \boldsymbol{\alpha}_{p,q} \rangle} B^{m+1}(p) B^{m+1}(q) \end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{i,j} \rangle} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \hat{\gamma}(\boldsymbol{\omega}) e^{i\langle \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}), \mathbf{z}_{i,j} \rangle} \mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}) \quad (2.110)$$

où on définit $\mathcal{D}(\boldsymbol{\omega})$ par

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{p,q} e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\omega}), \boldsymbol{\alpha}_{p,q} \rangle} B^{m+1}(p) B^{m+1}(q).$$

En multipliant (2.110) par son conjugué fois $\Delta x \Delta v$ on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta x \Delta v}{|\Omega|} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{|\omega'| \leq N/2} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{f}(\omega')} e^{i\langle \mathbf{k}(\omega) - \mathbf{k}(\omega'), \mathbf{z}_{i,j} \rangle} \\ &= \frac{\Delta x \Delta v}{|\Omega|} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{|\omega'| \leq N/2} e^{i\langle \mathbf{k}(\omega) - \mathbf{k}(\omega'), \mathbf{z}_{i,j} \rangle} \widehat{\gamma}(\omega) \overline{\widehat{\gamma}(\omega')} \mathcal{D}(\omega) \overline{\mathcal{D}(\omega')}. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\Delta x \Delta v}{|\Omega|} \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} e^{i\langle \mathbf{k}(\omega) - \mathbf{k}(\nu), \mathbf{z}_{i,j} \rangle} = \delta_{\omega, \nu} \quad (2.111)$$

on trouve l'expression suivante,

$$\sum_{|\omega| \leq N/2} |f(\omega)|^2 = \sum_{|\omega| \leq N/2} |\widehat{\gamma}(\omega)|^2 |\mathcal{D}(\omega)|^2, \quad (2.112)$$

qui nous sera utile plus tard. Maintenant calculons $\|f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\mu, \eta}}$. On a

$$\begin{aligned} (\pi_h f)_{i+\mu, j+\eta} &= \sum_{k,l} \gamma_{k,l}(f) B^{m+1}(i+\mu-k) B^{m+1}(j+\eta-l) \\ &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{k,l} \sum_{|\omega| \leq N/2} \widehat{\gamma}(\omega) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{k,l} \rangle} B^{m+1}(i+\mu-k) B^{m+1}(j+\eta-l) \\ &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{k,l} \sum_{|\omega| \leq N/2} \widehat{\gamma}(\omega) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{i+\mu, j+\eta} \rangle} e^{-i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{i+\mu-k, j+\eta-l} \rangle} B^{m+1}(i+\mu-k) B^{m+1}(j+\eta-l) \end{aligned}$$

et par suite

$$(\pi_h f)_{i+\mu, j+\eta} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\omega| \leq N/2} \widehat{\gamma}(\omega) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{i+\mu, j+\eta} \rangle} \mathcal{N}(\omega, \mu, \eta) \quad (2.113)$$

où

$$\mathcal{N}(\omega, \mu, \eta) = \sum_{p,q} e^{-i\langle \xi(\omega), \widehat{\alpha}_{p,q}(\mu, \eta) \rangle} B^{m+1}(\widehat{\alpha}_x^p(\mu)) B^{m+1}(\widehat{\alpha}_v^q(\eta))$$

avec les notations suivantes

$$\widehat{\alpha}_{p,q}(\mu, \eta) = (\widehat{\alpha}_x^p(\mu), \widehat{\alpha}_v^q(\eta)) = (p + \mu, q + \eta).$$

En multipliant (2.113) par son conjugué, en sommant sur i et j , en utilisant (2.111) et en posant

$$\mathcal{Q}(\omega, \mu, \eta) = \frac{\mathcal{N}(\omega, \mu, \eta)}{\mathcal{D}(\omega)},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\mu, \eta}}^2 &= \sum_{|\omega| \leq N/2} |\widehat{\gamma}(\omega)|^2 |\mathcal{N}(\omega, \mu, \eta)|^2 \\ &= \sum_{|\omega| \leq N/2} |\widehat{\gamma}(\omega)|^2 |\mathcal{D}(\omega)|^2 |\mathcal{Q}(\omega, \mu, \eta)|^2. \end{aligned} \quad (2.114)$$

A présent cherchons à estimer $|\mathcal{Q}(\omega, \mu, \eta)|$ où $\mathcal{Q}(\omega, \mu, \eta)$ s'écrit

$$\mathcal{Q}(\omega, \mu, \eta) = \frac{\left(\sum_i e^{-i\xi_x(\omega_x)\hat{\alpha}_x^i(\mu)} B^{m+1}(\hat{\alpha}_x^i(\mu)) \right) \left(\sum_j e^{-i\xi_v(\omega_v)\hat{\alpha}_v^j(\eta)} B^{m+1}(\hat{\alpha}_v^j(\eta)) \right)}{\left(\sum_p e^{-i\xi_x p} B^{m+1}(p) \right) \left(\sum_q e^{-i\xi_v q} B^{m+1}(q) \right)}. \quad (2.115)$$

Soit δ_h^μ une grille à une dimension périodique de pas de discrétisation h et translattée d'un incrément μh , avec $0 \leq \mu \leq 1$. On observe alors que dans l'équation (2.115) seule apparaît la transformée de Fourier discrète de la B-spline B^{m+1} qui s'écrit

$$\hat{B}_{\delta_h^\mu}^{m+1}(\xi) = \sum_{\alpha \in \delta_h^\mu} e^{-i\xi\alpha} B^{m+1}(\alpha).$$

On peut alors montrer que la transformée de Fourier discrète de la B-spline B^{m+1} est égale à sa transformée de Fourier continue à une puissance près en $O(\xi)$. Pour être plus précis on cherche à évaluer la différence

$$\Delta B^{m+1}(\xi, \delta_h^\mu) = \hat{B}^{m+1}(\xi) - \hat{B}_{\delta_h^\mu}^{m+1}(\xi).$$

D'un côté on peut s'écrire

$$\begin{aligned} \hat{B}^{m+1}(\xi) &= \int B^{m+1}(x) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int \left(\int B^m(x-u) B(u) du \right) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int \int B^m(x-u) B(u) e^{-ix\xi} dudx \\ &= \int \int B^m(x-u) B(u) e^{-i\xi(x-u)} e^{-i\xi u} dx du \\ &= \int B(u) e^{-i\xi u} \left(\int B^m(x-u) e^{-i\xi(x-u)} dx \right) du \\ &= \hat{B}(\xi) \hat{B}^m(\xi) \end{aligned}$$

et d'un autre coté on a

$$\begin{aligned}
\widehat{B}_{\delta_h^\mu}^{m+1}(\xi) &= \sum_{\alpha \in \delta_h^\mu} e^{-i\xi\alpha} B^{m+1}(\alpha) \\
&= \sum_{\alpha \in \delta_h^\mu} e^{-i\xi\alpha} \int B^m(\alpha - u) B(u) du \\
&= \sum_{\alpha \in \delta_h^\mu} \int e^{-i\xi\alpha} B^m(\alpha - u) B(u) du \\
&= \int \sum_{\alpha \in \delta_h^\mu} e^{-i\xi(\alpha-u)} B^m(\alpha - u) B(u) e^{-i\xi u} du \\
&= \int B(u) e^{-i\xi u} \left(\sum_{\alpha \in \delta_h^\mu} B^m(\alpha - u) e^{-i\xi(\alpha-u)} \right) du \\
&= \widehat{B}(\xi) \widehat{B}_{\delta_h^\mu}^m(\xi).
\end{aligned}$$

Par conséquent $\Delta B^{m+1}(\xi, \delta_h^\mu)$ peut s'écrire

$$\begin{aligned}
\Delta B^{m+1}(\xi, \delta_h^\mu) &= \int B(u) (e^{-iu\xi} - 1) \left(\widehat{B}^m(\xi) - \widehat{B}_{\delta_h^\mu}^m(\xi) \right) du \\
&+ \int B(u) \left(\int B^m(x - u) e^{-i\xi(x-u)} dx - \sum_{\alpha \in \delta_h^\mu} B^m(\alpha - u) e^{-i\xi(\alpha-u)} \right) du \\
&= \left(\widehat{B}^m(\xi) - \widehat{B}_{\delta_h^\mu}^m(\xi) \right) \int_{-1/2}^{1/2} (e^{-iu\xi} - 1) du \\
&+ \int \int B(u) B^m(x - u) e^{-i\xi(x-u)} dx du - \int \sum_{\alpha \in \delta_h^\mu} B(u) B^m(\alpha - u) e^{-i\xi(\alpha-u)} du \\
&= -2i \left(\widehat{B}^m(\xi) - \widehat{B}_{\delta_h^\mu}^m(\xi) \right) \int_{-1/2}^{1/2} e^{-iu\xi/2} \sin(\xi u/2) du \\
&+ \int \left(\int B(u) du \right) B^m(t) e^{-i\xi t} dt - \int \left(\sum_{\alpha \in \delta_h^\mu} B(\alpha - t) \right) B^m(t) e^{-i\xi t} dt \\
&= -2i \left(\widehat{B}^m(\xi) - \widehat{B}_{\delta_h^\mu}^m(\xi) \right) \int_{-1/2}^{1/2} e^{-iu\xi/2} \sin(\xi u/2) du. \tag{2.116}
\end{aligned}$$

En prenant le module de (2.116) il vient

$$|\Delta B^{m+1}(\xi, \delta_h^\mu)| \leq \frac{8}{\xi} (1 - \cos(\xi/4)) |\Delta B^m(\xi, \delta_h^\mu)|.$$

En utilisant un développement de Taylor autour de $\xi = 0$ on obtient

$$\sup_{\mu \in [0,1]} |\Delta B^{m+1}(\xi, \delta_h^\mu)| \leq O(|\xi|) \sup_{\mu \in [0,1]} |\Delta B^m(\xi, \delta_h^\mu)|,$$

et par récurrence il s'en suit que

$$\sup_{\mu \in [0,1]} |\Delta B^{m+1}(\xi, \delta_h^\mu)| \leq O(|\xi|^{m+1}).$$

Alors pour une grille δ_h^μ quelconque on a

$$\widehat{B}_{\delta_h^\mu}^{m+1}(\xi) = \widehat{B}^{m+1}(\xi) + O(|\xi|^{m+1}). \quad (2.117)$$

La preuve de la relation (2.117) est due à Childs et Morton [50], qui l'ont établie dans le cadre des méthodes caractéristiques-Galerkin. En introduisant (2.117) dans (2.115) on obtient

$$|\mathcal{Q}(\omega, \mu, \eta)|^2 = 1 + O(|\xi|^{m+1}). \quad (2.118)$$

D'après les propriétés de l'espace de discrétisation X_h on a $f \in \mathcal{C}^{m-1}$. D'après la relation liant la décroissance des coefficients de Fourier à la régularité de f il s'ensuit que

$$|\widehat{f}(\omega)| \sim \frac{1}{1 + |\omega|^m} \quad \text{et} \quad |\widehat{\gamma}(\omega)| \sim \frac{1}{1 + |\omega|^m}. \quad (2.119)$$

Par ailleurs il est facile de voir que

$$|\mathcal{D}(\omega)| \leq \sum_p B^m(p) \leq 1. \quad (2.120)$$

En introduisant (2.118) dans (2.114) et en utilisant (2.119), (2.120) et (2.112) on obtient

$$\begin{aligned} \|\pi_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\mu, \eta}}^2 &\leq \sum_{|\omega| \leq N/2} |\widehat{\gamma}(\omega)|^2 |\mathcal{D}(\omega)|^2 + O\left(h^{m+1} \sum_{|\omega| \leq N/2} \frac{|\omega|^{m+1} |\mathcal{D}(\omega)|^2}{1 + |\omega|^m}\right) \\ &\leq \|f\|_{L_h^2}^2 + O\left(h^{m+1} \sum_{|\omega| \leq N/2} \frac{|\omega|^{m+1}}{1 + |\omega|^m}\right) \\ &\leq \|f\|_{L_h^2}^2 + O\left(h^{m+1} \sum_{|\omega| \leq N/2} |\omega|\right) \\ &\leq \|f\|_{L_h^2}^2 + O(h^{m-2}) \end{aligned} \quad (2.121)$$

Montrons maintenant que

$$\|\pi_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)} + O(h^{m-2}).$$

En effet on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|\pi_h f\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^{N-1} \|\pi_h f\|_{L^2_{\frac{h}{N}, \Delta_h^{ih/N, jh/N}}}^2 \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{\|\pi_h f\|_{L^2_{h, \Delta_h^{ih/N, jh/N}}}^2}{N^2} \\
&\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i,j=0}^{N-1} \frac{\|f\|_{L^2_h(\Omega)}^2 + O(h^{m-2})}{N^2} \\
&\leq \|f\|_{L^2_h(\Omega)}^2 + O(h^{m-2}).
\end{aligned}$$

Maintenant montrons les estimations

$$\|\tilde{\mathcal{T}}_i f\|_{L^2_h(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2_h(\Omega)} + O(h^{m-2}), \quad i = 1, 2.$$

Il s'agit donc de calculer $\|\pi_h f\|_{L^2_h, \Delta_h^{\alpha, 0}}$ et $\|\pi_h f\|_{L^2_h, \Delta_h^{0, \beta}}$. Commençons par calculer $\|f\|_{L^2_h, \Delta_h^{\alpha, 0}}$. On a

$$\begin{aligned}
(\pi_h f)_{i+\alpha_j, j} &= \sum_{k,l} \gamma_{k,l}(f) B^{m+1}(i+\alpha_j-k) B^{m+1}(j-l) \\
&= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{k,l} \sum_{|\omega| \leq N/2} \hat{\gamma}(\omega) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{k,l} \rangle} B^{m+1}(i+\alpha_j-k) B^{m+1}(j-l) \\
&= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{k,l} \sum_{|\omega| \leq N/2} \hat{\gamma}(\omega) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{i+\alpha_j, j} \rangle} e^{-i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{i+\alpha_j-k, j-l} \rangle} B^{m+1}(i+\alpha_j-k) B^{m+1}(j-l)
\end{aligned}$$

et par suite

$$(\pi_h f)_{i+\alpha_j, j} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\omega| \leq N/2} \hat{\gamma}(\omega) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{i+\alpha_j, j} \rangle} \varrho(\omega_x, \alpha_j) D(\omega_x) D(\omega_v) \quad (2.122)$$

où

$$\varrho(\omega_x, \alpha_j) = \frac{\sum e^{i\xi_x(\omega_x)(i+\alpha_j-k)} B(i+\alpha_j-k)}{\sum_p e^{i\xi_x(\omega_x)p} B(p)} \quad (2.123)$$

et

$$D(\omega_x) = \sum_p e^{i\xi_x(\omega_x)p} B(p).$$

En multipliant (2.122) par son conjugué, en sommant sur i et j , grâce à (2.78) on obtient

$$\|\pi_h f\|_{L^2_h, \Delta_h^{\alpha, 0}}^2 = \frac{\Delta v}{|2R|} \sum_{\substack{|\omega| \leq N/2 \\ |\omega'_v| \leq N_v/2 \\ j=0, \dots, N_v}} \hat{\gamma}(\omega) \overline{\hat{\gamma}(\omega_x, \omega'_v)} |D(\omega_x)| |D(\omega_v) \overline{D(\omega'_v)}| |\varrho(\alpha_j, \omega_x)|^2 e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v))v_j}$$

qui grâce à (2.79) devient

$$\|\pi_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, 0}}^2 \leq \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \varrho_{\text{sup}}(\omega_x) |\widehat{\gamma}(\boldsymbol{\omega})|^2 |\mathcal{D}(\boldsymbol{\omega})|^2$$

avec

$$\varrho_{\text{sup}}(\omega_x) = \sup\{|\varrho(\alpha_j, \omega_x)|^2, 0 \leq \alpha_j \leq 1, \}$$

En utilisant (2.117) et (2.123) on obtient

$$|\varrho_{\text{sup}}(\omega_x)|^2 = 1 + O(|\xi_x|^{m+1})$$

et par conséquent on obtient

$$\|\pi_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, 0}}^2 \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)} + O(h^{m-2}).$$

De la même manière on trouve aussi

$$\|\pi_h f\|_{L_h^2, \Delta_h^{0, \beta}}^2 \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)} + O(h^{m-2}).$$

Finalement on obtient pour $i = 1$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathcal{T}}_1 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \|\pi_h \mathcal{T}_1 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq \|\pi_h \mathcal{T}_1 f(t)\|_{L_h^2, \Delta_h^{\alpha, 0}} \\ &\leq \|\mathcal{T}_1 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} + O(h^{m-2}) \\ &\leq \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} + O(h^{m-2}) \end{aligned}$$

et pour $i = 2$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathcal{T}}_2 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \|\pi_h \mathcal{T}_2 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq \|\pi_h \mathcal{T}_2 f(t)\|_{L_h^2, \Delta_h^{0, \beta}} \\ &\leq \|\mathcal{T}_2 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} + O(h^{m-2}) \\ &\leq \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} + O(h^{m-2}) \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 29 *Les estimations précédentes ne sont pas optimales car, comme dans le cas de l'interpolation de Lagrange il devrait exister une constante δ strictement positive indépendante de $\boldsymbol{\omega}$, μ et η telle que*

$$|\mathcal{Q}(\boldsymbol{\omega}, \mu, \eta)|^2 \leq 1 - \delta |\boldsymbol{\xi}|^{m+1} \quad \text{et} \quad |\varrho_{\text{sup}}(\omega)|^2 \leq 1 - \delta |\xi|^{m+1}$$

ce qui permettrait d'obtenir les inégalités

$$\|\pi_h f\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_h^2}, \quad \text{et} \quad \|\widetilde{\mathcal{T}}_i f\|_{L^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)}$$

et les estimations d'erreurs

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right)$$

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0, T; L^\infty([0, L]))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right)$$

2.4.6.2 Reconstruction par ondelettes

Dans cette section on prouve la convergence des schémas semi-Lagrangiens lorsqu'on considère l'approximation par ondelettes pour reconstruire la fonction de distribution.

Avant tout, on rappelle brièvement ce qu'est une analyse multi-résolution par ondelettes.

Par définition, une analyse multirésolution est une suite de $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$, vérifiant les propriétés suivantes

$$V_j \subset V_{j+1} \quad (2.124)$$

$$f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1} \quad (2.125)$$

$$\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0 \quad (2.126)$$

$$\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ est dense dans } L^2(\mathbb{R}) \quad (2.127)$$

$$\begin{aligned} &\text{Il existe une fonction } \phi(x) \text{ dans } V_0 \text{ telle que } \{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}} \\ &\text{soit une base de Riesz pour } V_0 \end{aligned} \quad (2.128)$$

Rappelons qu'une famille $\{e_j\}$ est une base de Riesz d'un espace de Hilbert \mathcal{H} si et seulement si les deux propriétés suivantes sont satisfaites

- ★ Les combinaisons linéaires finies $\sum \beta_i e_i$ sont denses dans \mathcal{H}
- ★ Il existe deux constantes strictement positives A et B telles que pour toute suite finie $\{\beta_i\}$, on ait

$$A \sum_i |\beta_i|^2 \leq \left\| \sum_i \beta_i e_i \right\|_{\mathcal{H}}^2 \leq B \sum_i |\beta_i|^2 \quad (2.129)$$

Si on appelle P_j l'opérateur de projection sur V_j , alors (2.127) implique que $\lim_{j \rightarrow \infty} P_j f = f$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$. Une conséquence de la propriété (2.128) est que V_0 est invariant par translation d'entier,

$$f \in V_0 \implies f(\cdot - k) \in V_0, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Généralement on impose qu'en plus d'être une base Riesz la suite $\{\phi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base orthonormée de V_0 . Il s'en suit que $\{\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base orthonormée de V_j . Alors il existe une base d'ondelettes orthonormée $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ de $L^2(\mathbb{R})$, $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ telle que pour tout $f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$P_{j+1} f = P_j f + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on peut alors définir W_j comme le supplémentaire orthogonal de V_j dans V_{j+1} . On a

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

et

$$W_j \perp W_{j'} \text{ si } j \neq j'.$$

Par conséquent, pour $j > j_0$,

$$V_j = V_{j_0} \bigoplus_{i=j_0}^{j-1} W_i$$

où tous les sous espaces sont orthonormés. En vertu de (2.126) et (2.127) on peut écrire la décomposition en sous espaces orthogonaux de $L^2(\mathbb{R})$

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} W_j.$$

De plus les espaces W_j héritent de la propriété d'échelle (2.125) des espaces V_j :

$$f \in W_j \iff f(2^j \cdot) \in W_0.$$

Comme $\phi \in V_0 \subset V_1$, et puisque $\phi_{1,n}$ est une base orthonormale de V_1 on a

$$\phi = \sum_n h_n \phi_{1,n} \quad (2.130)$$

avec

$$h_n = \langle \phi, \phi_{1,n} \rangle \quad \text{et} \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1. \quad (2.131)$$

On peut écrire (2.130) de la manière suivante

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n) \quad (2.132)$$

ou encore dans l'espace des fréquences

$$\widehat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi} \widehat{\phi}(\xi/2), \quad (2.133)$$

où la convergence des sommes a lieu dans L^2 . La formule (2.133) peut se récrire comme

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0(\xi/2) \widehat{\phi}(\xi/2) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \quad (2.134)$$

où

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi} \quad (2.135)$$

est une fonction 2π -périodique dans $L^2([0, 2\pi])$. De plus on peut définir ψ via la transformée de ϕ par la relation

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \widehat{\phi}(\xi/2). \quad (2.136)$$

L'orthonormalité de $\phi(\cdot - l)$ (resp. $\psi(\cdot - l)$) qui implique pour $\widehat{\phi}$ (resp. $\widehat{\psi}$) de satisfaire la relation

$$\sum_l |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1} \quad (\text{resp.} \quad \sum_l |\widehat{\psi}(\xi + 2\pi l)|^2 = (2\pi)^{-1}) \quad (2.137)$$

confère à m_0 la propriété suivante (voir [58])

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1. \quad (2.138)$$

On voit que dans le cas où les $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ forment une base orthonormale de $L^2(\mathbb{R})$ alors la propriété de stabilité sur l'opérateur de projection $\pi_h = P_N$ est immédiate. En effet on a

$$\begin{aligned} \|\pi_h f\|_{L^2}^2 &= \|P_N f\|_{L^2}^2 \\ &= \sum_k |\langle f, \phi_{N,k} \rangle|^2 \\ &= \sum_{\substack{k \\ j \leq N}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2 \\ &\leq \|f\|_{L^2}^2 \end{aligned} \quad (2.139)$$

où

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k,j \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|^2.$$

En fait il est plus intéressant, d'un point de vue pratique de chercher les conditions que doit satisfaire la fonction de transfert m_0 (c'est-à-dire les coefficients h_n du filtre numérique qui définissent l'ondelette ψ) de telle sorte que l'analyse multirésolution fournisse une reconstruction qui soit L^2 -stable et d'ordre élevé. Pour cela on a besoin de définir les structures obliques ou en anglais "frame". L'existence d'une base de Riesz implique l'existence d'un opérateur linéaire continu surjectif T de l^2 (espace des suites de carré sommable) dans l'espace de Hilbert \mathcal{H} tel que pour tout $x \in \mathcal{H}$ il existe une suite $\beta_k \in l^2$ telle que $x = \sum_k \beta_k e_k$ et telle que l'inégalité (2.129) soit vérifiée. Alors on peut former l'opérateur adjoint $T^* : \mathcal{H} \rightarrow l^2$ de T (voir [150]). Cet opérateur est continu et on a $\|T^*(x)\|_{l^2} \geq B^{-1} \|x\|_{\mathcal{H}}$, $\forall x \in \mathcal{H}$. Autrement dit il existe deux constantes $b \geq a > 0$ telles que

$$a \|x\|_{\mathcal{H}} \leq \left(\sum_k |\langle x, e_k \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \right)^{1/2} \leq b \|x\|_{\mathcal{H}}. \quad (2.140)$$

On peut récrire (2.140) en introduisant un opérateur linéaire continu $L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ défini par

$$L(x) = \sum_k \langle x, e_k \rangle_{\mathcal{H}} e_k.$$

Alors (2.140) signifie que

$$aI \leq L \leq bI,$$

où I est l'opérateur identité. On voit que l'opérateur de reconstruction sera stable si les constantes B et b qui interviennent respectivement dans les inégalités (2.140) et (2.129) sont inférieures ou égales à 1.

Théorème 30 *Supposons que m_0 est un polynôme trigonométrique tel que*

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad (2.141)$$

et $m_0(0) = 1$. On définit ϕ et ψ par

$$\widehat{\phi}(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \prod_{j=1}^{\infty} m_0(2^{-j}\xi), \quad (2.142)$$

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \widehat{\phi}(\xi/2). \quad (2.143)$$

Alors

1) ϕ et ψ sont des fonctions de L^2 à support compact, satisfaisant

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2x - n), \\ \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_n (-1)^n h_{-n+1} \phi(2x - n), \end{aligned}$$

où h_n est déterminé par m_0 via $m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\xi}$

2) les $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$, $j, k \in \mathbb{Z}$ constituent une structure oblique (ou "frame") de constante 1, c'est à dire $a = b = 1$.

3) $B \leq 1$ où B intervient dans l'inégalité (2.129).

Preuve. Pour la démonstration des points 1) et 2) voir la proposition 6.2.3 (Daubechies (1992)) dans [58]. Montrons maintenant que $B \leq 1$. Pour cela montrons d'abord que

$$\sum_l |\widehat{\psi}(\xi + 2\pi l)|^2 \leq (2\pi)^{-1}.$$

En utilisant (2.143) et (2.141) et en supposant que

$$\sum_l |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \leq (2\pi)^{-1}, \quad (2.144)$$

il vient

$$\begin{aligned} \sum_l |\widehat{\psi}(\xi + 2\pi l)|^2 &= \sum_l |m_0(\xi/2 + \pi l + \pi)|^2 |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \\ &= |m_0(\xi/2 + \pi)|^2 \sum_m |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi m)|^2 \\ &\quad + |m_0(\xi/2)|^2 \sum_m |\widehat{\phi}(\xi + \pi + 2\pi m)|^2 \\ &\leq (2\pi)^{-1} (|m_0(\xi/2)|^2 + |m_0(\xi/2 + \pi)|^2) \\ &\leq (2\pi)^{-1} \end{aligned}$$

Il faut donc montrer l'inégalité (2.144). On pose

$$\widetilde{\phi}_k(\xi) = (2\pi)^{-1} \prod_{j=1}^{k+1} m_0(2^{-j}\xi) \chi_{[-\pi, \pi]}(2^{-k}\xi)$$

où $\chi_{[-\pi, \pi]}(2^{-k}\xi) = 1$ si $|\xi| \leq \pi$, et 0 sinon. Alors $\tilde{\phi}_k(\xi) \rightarrow \hat{\phi}$ presque partout lorsque $k \rightarrow \infty$.

En remarquant que $\chi_{[-\pi, \pi]}(2^{-k}\xi + 2^{-k}2\pi l) = 0$ si $|l| > 2^k$, en utilisant (2.141) et la périodicité de m_0 on a

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\tilde{\phi}_k(\xi + 2\pi l)|^2 &= \sum_{l=-2^k}^{2^k} \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 \\
&= \sum_{l=1}^{2^k} \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 + \sum_{l=-2^k}^0 \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 \\
&= \sum_{l=1}^{2^k} \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 + \sum_{l=0}^{2^k} \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 \\
&= \sum_{l=1}^{2^k} \left\{ \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 + \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 \right\} \\
&\quad + \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 \\
&= \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2^k} |m_0(2^{-k-1}\xi + 2^{-k-1}2\pi l)|^2 \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2^k} |m_0(2^{-k-1}\xi + 2^{-k-1}2\pi l - \pi)|^2 \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 \\
&= \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 + \sum_{l=1}^{2^k} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2
\end{aligned}$$

En décomposant le second terme de la somme précédente on obtient

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\tilde{\phi}_k(\xi + 2\pi l)|^2 &= \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 \\
&\quad + \sum_{l=1}^{2^{k-1}} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 + \sum_{l=2^{k-1}+1}^{2^k} \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 \\
&= \sum_{l=1}^{2^{k-1}} \left\{ \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 + \prod_{j=1}^k |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l + 2^{-j}2\pi 2^{k-1})|^2 \right\} \\
&\quad + \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2
\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\tilde{\phi}_k(\xi + 2\pi l)|^2 &= \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 \\
&+ \sum_{l=1}^{2^{k-1}} |m_0(2^{-k}\xi + 2^{-k}2\pi l)|^2 \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 \\
&+ \sum_{l=1}^{2^{k-1}} |m_0(2^{-k}\xi + 2^{-k}2\pi l + \pi)|^2 \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 \\
&= \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 + \sum_{l=1}^{2^{k-1}} \prod_{j=1}^{k-1} |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2
\end{aligned}$$

et par récurrence, en utilisant (2.141), on obtient

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\tilde{\phi}_k(\xi + 2\pi l)|^2 &= \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 + \sum_{l=1}^2 \prod_{j=1}^1 |m_0(2^{-j}\xi + 2^{-j}2\pi l)|^2 \\
&= \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 + |m_0(\xi/2 + \pi)|^2 + |m_0(\xi/2)|^2 \\
&= 1 + \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2
\end{aligned}$$

Puisque $m_0(0) = 1$ et $m_0(\pm\pi) = 0$ on a

$$\begin{aligned}
\liminf_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 &= \liminf_{k \rightarrow \infty} |m_0(\xi/2)|^2 \dots |m_0(2^{-k}\xi)|^2 |m_0(2^{-k-1}\xi - \pi)|^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Par suite il vient

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \liminf_{k \rightarrow \infty} |\tilde{\phi}_k(\xi + 2\pi l)|^2 \\
&\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\tilde{\phi}_k(\xi + 2\pi l)|^2 \\
&\leq 1 + \liminf_{k \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{k+1} |m_0(2^{-j}\xi - 2^{-j}2\pi 2^k)|^2 \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Maintenant en utilisant la relation de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_k c_k e^{-ik\xi} \right|^2 d\xi = \sum_k |c_k|^2$$

et l'inégalité

$$\sum_l |\widehat{\psi}(\xi + 2\pi l)|^2 \leq (2\pi)^{-1}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j,k} c_{j,k} 2^{j/2} \psi(2^j \cdot -k) \right\|_{L^2}^2 &= \int \left| \sum_{j,k} c_{j,k} e^{-i\xi k} \widehat{\psi}(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_k c_{j,k} e^{-ik\xi} \right|^2 2\pi \sum_l |\widehat{\psi}(\xi + 2\pi l)|^2 d\xi \\ &\leq \sum_{j,k} |c_{j,k}|^2 \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

Remarque 31 *Pour être sûr que ϕ génère une véritable analyse multirésolution il faut que la séquence $\{\phi(x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ soit une base de Riesz, c'est-à-dire que l'inégalité (2.129) doit être vérifiée avec A et B strictement positif. Autrement dit il faut s'assurer que*

$$\sum_l |\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)|^2 \geq A > 0 \quad (2.145)$$

En terme de m_0 la condition (2.145) est équivalente à

$$m_0(2^{-k}\xi) \neq 0, \quad k \geq 0, \quad \xi \in K$$

où

$$0 \in K, \quad |K| = 2\pi, \quad \text{et} \quad \cup_{n \in \mathbb{Z}} (K + 2n\pi) = \mathbb{R}.$$

Un choix judicieux de K implique que la condition (2.145) est assurée si $m_0(\xi) \neq 0$ $|\xi| \leq \pi/3$ (cf [52, 58]).

Maintenant que l'on a trouvé les conditions pour que la reconstruction par ondelettes soit stable, on va chercher les conditions pour que la reconstruction soit d'ordre élevé. Soit m cet ordre. En fait si les coefficients h_n du filtre numérique vérifient la propriété

$$\sum_n (-1)^n n^\ell h_n = 0, \quad \ell = 0, \dots, m-1,$$

qui est équivalente à la propriété

$$m_0(\xi + \pi) = O(|\xi|^m) \iff \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} m_0|_{\xi=\pi} = 0, \quad \ell = 0, \dots, m-1,$$

alors (voir [58, 60, 52]) les polynômes de degré inférieur ou égal à $m-1$ peuvent être générés par des combinaisons linéaires de $\phi(x - k)$. L'ordre d'approximation d'une reconstruction par ondelettes est donné par le théorème suivant.

Théorème 32 Soit $\psi_{j,k}$ une base d'ondelettes associée à une analyse multirésolution définie par (2.124)-(2.128), (2.133) et (2.136), où les coefficients du filtre numérique h_n vérifient les relations

$$\sum_n (-1)^n n^\ell h_n = 0, \quad \ell = 0, \dots, m-1.$$

Si $\phi \in H^{\alpha(m)}$ alors pour toute fonction $f \in H^m$ il existe une constante C indépendante de $h \sim 2^{-N}$ telle que

$$\|f - \pi_h f\|_{H^k} \leq Ch^{m-k} \|f\|_{H^m}, \quad 0 \leq k \leq \alpha(m)$$

où $\pi_h \equiv P_N$.

Preuve. Pour la preuve de ce théorème voir [79, 60, 52, 80]. ■

Pour résumer une analyse multirésolution fournit une reconstruction d'ordre élevé et L^2 -stable si

$$m_0(\xi) \neq 0 \quad |\xi| \leq \pi/3, \quad (2.146)$$

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi + \pi)|^2 = 1 \quad (2.147)$$

et

$$|m_0(\xi)|^2 = 1 + O(|\xi|^{2m}). \quad (2.148)$$

On donne ici un exemple d'une classe d'ondelettes qui vérifie les propriétés (2.147) et (2.148).

Exemple : les coiffettes. Les coiffettes sont construites de telle sorte que pour $\ell = 0, \dots, m-1$,

$$\int x^\ell \psi(x) dx = 0 \iff \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} \widehat{\psi}|_{\xi=0} = 0, \quad (2.149)$$

et de telle sorte que pour $\ell = 1, \dots, m-1$,

$$\begin{aligned} \int \phi(x) dx = 1 &\iff \widehat{\phi}(0) = 1, \\ \int x^\ell \phi(x) dx = 0, &\iff \frac{d^\ell}{d\xi^\ell} \widehat{\phi}|_{\xi=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.150)$$

L'avantage d'avoir beaucoup de moments qui s'annulent pour ψ , est la compressibilité. En effet pour les échelles fines les coefficients d'ondelettes $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ d'une fonction seront pratiquement nuls là où la fonction sera régulière. Cela permet donc de localiser de manière précise les singularités d'une fonction. Puisque $\int \phi(x) dx = 1$, les coefficients $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$ ne seront jamais nuls. De plus, comme $\int x^\ell \phi(x) dx = 0$, $\ell = 1, \dots, m-1$, pour f assez régulière, un développement de Taylor montre que pour j assez grand $\langle f, \phi_{j,k} \rangle \simeq 2^{-j/2} f(2^j k)$ avec une erreur négligeablement petite si f est régulière. On a ainsi une formule de quadrature simple pour déterminer les coefficients $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$ à partir de f lorsque j est assez grand. La condition (2.149) est équivalente en terme de m_0 à

$$m_0(\xi) = \left(\frac{1 + e^{-i\xi}}{2} \right)^m \mathcal{L}(\xi),$$

et la condition (2.150) est équivalente à

$$m_0(\xi) = 1 + (1 - e^{-i\xi})^m \tilde{\mathcal{L}}(\xi), \quad (2.151)$$

où $\mathcal{L}(\xi)$ et $\tilde{\mathcal{L}}(\xi)$ sont des polynômes trigonométriques (voir [60]). La dernière équation (2.151) implique l'équation (2.148) et la condition (2.146). Par ailleurs comme les coiffettes forment une base orthonormale l'équation (2.147) est satisfaite.

Les propriétés de stabilité et d'approximation d'ordre élevé présentées ci dessus permettent d'écrire le théorème suivant

Théorème 33 *Supposons $f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^{m+1}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, positive, périodique par rapport à x de période L , alors la solution numérique du système de Vlasov-Poisson (f_h, E_h) , calculée par le schéma exposé dans la section 2.4.3, où $\pi_h = P_N \otimes P_N$, avec $h = 2^{-N}$, et*

$$P_N f = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ j \leq N}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}.$$

converge vers la solution périodique (f, E) du système de Vlasov-Poisson et il existe une constante $C = C(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;H^{m+1}(\Omega))})$ indépendante de Δt , h telle que

$$\|f - f_h\|_{l^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right)$$

et

$$\|E - E_h\|_{l^\infty(0,T;L^2([0,L]))} \leq C \left(\Delta t^2 + h^{m+1} + \frac{h^{m+1}}{\Delta t} \right)$$

Remarque 34 *Le cas idéal serait d'obtenir des ondelettes orthonormées (stabilité), interpolantes (approximation d'ordre élevé) et à support compact (décomposition/reconstruction locale, performance calcul). Malheureusement ces trois conditions sont impossibles à réaliser simultanément (cf [58]). Cependant on peut obtenir une base d'ondelettes orthonormées, à support compact, non interpolantes mais d'approximation d'ordre élevé, ce qui est le cas pour les coiffettes. Les ondelettes, construites à partir des polynômes de Lagrange, sont à support compact, interpolantes, non orthonormées mais L^2 -stable. Enfin les ondelettes de Lemarié construites à partir des B-splines sont orthonormées, interpolantes, à support non compact mais à décroissance exponentielle.*

2.5 Convergence d'un schéma semi-Lagrangien avec propagation de gradients

Les schémas semi-Lagrangiens sur des maillages non structurés qui utilisent un opérateur d'interpolation de Lagrange de degré élevé pour reconstruire la fonction de distribution sont instables. Aussi nous verrons dans le prochain chapitre que des reconstructions de type Hermite qui implique la propagation de f et son gradient dans l'espace des phases donnent des schémas stables et d'ordre élevé. Ici nous donnons une preuve de convergence des solutions construites sur l'algorithme présenté dans le prochain chapitre. L'étude de la stabilité H^1 des opérateurs d'interpolation définis sur une triangulation étant difficile, l'espace des phases est approché par une grille.

2.5.1 Hypothèses de régularité pour le problème continu

Dans la suite de notre propos on supposera que $f_0(x, v)$ vérifie les hypothèses de régularité suivantes

$$f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^4(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$$

Le théorème 2 donne l'existence et l'unicité de la solution (f, E) tel que

$$f \in \mathcal{C}_b^4(0, T; \mathcal{C}_{c,per_x}^4(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$$

$$E \in \mathcal{C}_b^4(0, T; \mathcal{C}_{b,per_x}^4(\mathbb{R}))$$

2.5.2 Le problème discret

2.5.2.1 Opérateurs d'interpolation

Soit $\Omega = [0, L] \times [-R, R]$, avec $R > Q(T)$, et \mathcal{M}_h une grille cartésienne de l'espace des phases Ω . \mathcal{M}_h est donnée par une suite croissante de points $(x_i)_{i \in \{0, \dots, N_x\}}$ appartenant à l'intervalle $[0, L]$ et une suite croissante de points $(v_i)_{i \in \{0, \dots, N_v\}}$ appartenant à l'intervalle $[-R, R]$.

Soit $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ le pas de discrétisation dans l'espace physique et $\Delta v_i = v_{i+1} - v_i$ le pas de discrétisation dans l'espace des vitesses. Afin de simplifier l'étude on supposera que $\Delta x_i = \Delta x$, et $\Delta v_i = \Delta v$. On appelle h un paramètre de discrétisation générique qui désigne Δx ou Δv . On définit un opérateur d'interpolation d'Hermite $\mathcal{I}_h^{\mathcal{H}}$

$$\mathcal{I}_h^{\mathcal{H}} f(z)|_{[z_i, z_{i+1}]} = f(z_i)\phi_i(z) + f(z_{i+1})\phi_{i+1}(z) + \dot{f}(z_i)\psi_i(z) + \dot{f}(z_{i+1})\psi_{i+1}(z)$$

où

$$\begin{aligned}\phi_i(z) &= \frac{(z - z_{i+1})^2[(z_i - z_{i+1}) - 2(z - z_i)]}{(z_i - z_{i+1})^3}, \\ \phi_{i+1}(z) &= \frac{(z - z_i)^2[(z_i - z_{i+1}) + 2(z - z_{i+1})]}{(z_i - z_{i+1})^3}, \\ \psi_i(z) &= \frac{(z - z_i)(z - z_{i+1})^2}{(z_i - z_{i+1})^2}, \\ \psi_{i+1}(z) &= \frac{(z - z_i)^2(z - z_{i+1})}{(z_i - z_{i+1})^2}, \\ \dot{f}(z) &= \frac{df}{dz}(z)\end{aligned}$$

et un opérateur d'interpolation de Lagrange $\mathcal{I}_h^{\mathcal{L}}$

$$\mathcal{I}_h^{\mathcal{L}} f(z)|_{[z_i, z_{i+1}]} = \sum_{k=i-1}^{i+2} f(z_k) \ell_k^A(z),$$

où

$$\ell_k^A(z) = \prod_{\substack{i=k+2 \\ i \neq k}}^{i=k+2} \frac{(z - z_i)}{(z_k - z_i)}.$$

On considère alors l'opérateur d'interpolation $\pi_h^{\mathcal{H}}$ défini par

$$\pi_h^{\mathcal{H}} f(x, v) = \sum_{j=0}^{N_v} \mathcal{I}_h^{\mathcal{H}} f(x, v_j) \delta(v, v_j)$$

lorsqu'on effectue du transport dans la direction x et

$$\pi_h^{\mathcal{H}} f(x, v) = \sum_{i=0}^{N_x} \mathcal{I}_h^{\mathcal{H}} f(x_i, v) \delta(x, x_i)$$

lorsqu'on effectue du transport dans la direction v , où

$$\delta(y, y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = y_i \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même on définit $\pi_h^{\mathcal{L}}$ à partir de $\mathcal{I}_h^{\mathcal{L}}$.

Soit $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\nu}$ les vecteurs $(\mu_0, \dots, \mu_j, \dots, \mu_{N_x})$ et $(\nu_0, \dots, \nu_i, \dots, \nu_{N_v})$ avec $0 \leq \mu_j, \nu_i \leq 1$, $\forall (i, j) \in [0, N_x] \times [0, N_v]$. On définit la norme $\|\cdot\|_{L_h^2, \Delta_h^{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}}}$ par

$$\|f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}}} = \left(\Delta x \Delta v \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} |f_{i+\mu_j, j+\nu_i}|^2 \right)^{1/2}.$$

On définit aussi l'opérateur de translation $\tau_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}}$ par

$$(\tau_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu}} f)_{i,j} = f_{i+\mu_j, j+\nu_i} = f(x_i + \mu_j \Delta x, v_j + \nu_i \Delta v).$$

2.5.2.2 Opérateurs de transport

Maintenant on introduit quelques opérateurs de transport. Soit $\mathcal{I}_{h,\xi}$, l'opérateur de translation défini par

$$\mathcal{I}_{h,\xi}f(t, x, v) = f(t, x - h, v - \xi).$$

On suppose que $t \in [t^n, t^{n+1}]$ alors, on peut définir $\mathcal{T}_1 \equiv \mathcal{T}_1^{0,0}$, $\mathcal{T}_2 \equiv \mathcal{T}_2^{0,0}$, $\mathcal{T}_1^{1,0}$, $\mathcal{T}_1^{0,1}$, $\mathcal{T}_2^{1,0}$ et $\mathcal{T}_2^{0,1}$ comme il suit

$$\mathcal{T}_1f(t, x, v) = (\mathcal{I}_{v\Delta t/2,0}f)(t, x, v) = f(t, x - v\Delta t/2, v),$$

$$\mathcal{T}_2f(t, x, v) = (\mathcal{I}_{0,\Delta t E}f)(t, x, v) = f(t, x, v - \Delta t E(t^{n+1/2}, x)),$$

$$\mathcal{T}_1^{1,0}f(t, x, v) = \partial_x \mathcal{T}_1f(t, x, v)$$

$$= (\mathcal{I}_{v\Delta t/2,0}\partial_x f)(t, x, v) = (\partial_x f)(t, x - v\Delta t/2, v),$$

$$\mathcal{T}_1^{0,1}f(t, x, v) = \partial_v \mathcal{T}_1f(t, x, v)$$

$$= (\mathcal{I}_{v\Delta t/2,0}\partial_v f)(t, x, v) - \frac{\Delta t}{2} (\mathcal{I}_{v\Delta t/2,0}\partial_x f)(t, x, v)$$

$$= (\partial_v f)(t, x - v\Delta t/2, v) - \frac{\Delta t}{2} (\partial_x f)(t, x - v\Delta t/2, v),$$

$$\mathcal{T}_2^{1,0}f(t, x, v) = \partial_x \mathcal{T}_2f(t, x, v)$$

$$= (\mathcal{I}_{0,\Delta t E}\partial_x f)(t, x, v) - \Delta t \partial_x E(t^{n+1/2}, x) (\mathcal{I}_{0,\Delta t E}\partial_v f)(t, x, v)$$

$$= (\partial_x f)(t, x, v - \Delta t E(t^{n+1/2}, x))$$

$$- \Delta t \partial_x E(t^{n+1/2}, x) (\partial_v f)(t, x, v - \Delta t E(t^{n+1/2}, x))$$

$$\mathcal{T}_2^{0,1}f(t, x, v) = \partial_v \mathcal{T}_2f(t, x, v)$$

$$= (\mathcal{I}_{0,\Delta t E}\partial_v f)(t, x, v) = (\partial_v f)(t, x, v - \Delta t E(t^{n+1/2}, x))$$

où $E(t, x)$ est solution du problème de Poisson

$$\begin{cases} \frac{dE}{dx}(t, x) = \int_v f(t, x, v) dv - 1 \\ \int_0^L E(t, x) dx = 0. \end{cases} \quad (2.152)$$

On pose

$$x_k - v_l \Delta t / 2 = x_{k+m} + \theta_k \Delta x$$

et

$$\begin{aligned}\phi_0(z) &= \frac{1}{h^3}(h+2z)(h-z)^2 \\ \phi_1(z) &= \frac{z^2}{h^3}(3h-2z) \\ \psi_0(z) &= \frac{z}{h^2}(h-z)^2 \\ \psi_1(z) &= \frac{z^2}{h^2}(z-h)\end{aligned}$$

où h désigne Δx ou Δv . On définit alors $\tilde{\mathcal{T}}_1$, $\tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0}$ et $\tilde{\mathcal{T}}_1^{0,1}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\mathcal{T}}_1 f(t)\right)_{k,l} &= \left(\mathcal{I}_{v\Delta t/2,0} \pi_h^{\mathcal{H}} f\right)(t, x_k, v_l) \\ &= f_{m+k,l}(t) \phi_0(\theta_k \Delta x) + f_{m+k+1,l}(t) \phi_1(\theta_k \Delta x) \\ &\quad + \partial_x f_{m+k,l}(t) \psi_0(\theta_k \Delta x) + \partial_x f_{m+k+1,l}(t) \psi_1(\theta_k \Delta x) \\ \left(\tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f(t)\right)_{k,l} &= \left(\mathcal{I}_{v\Delta t/2,0} \partial_x \pi_h^{\mathcal{H}} f\right)(t, x_k, v_l) \\ &= f_{m+k,l}(t) \dot{\phi}_0(\theta_k \Delta x) + f_{m+k+1,l}(t) \dot{\phi}_1(\theta_k \Delta x) \\ &\quad + \partial_x f_{m+k,l}(t) \dot{\psi}_0(\theta_k \Delta x) + \partial_x f_{m+k+1,l}(t) \dot{\psi}_1(\theta_k \Delta x) \\ \left(\tilde{\mathcal{T}}_1^{0,1} f(t)\right)_{k,l} &= \left(\mathcal{I}_{v\Delta t/2,0} \pi_h^{\mathcal{L}} \partial_v f\right)(t, x_k, v_l) - \frac{\Delta t}{2} \left(\mathcal{I}_{v\Delta t/2,0} \partial_x \pi_h^{\mathcal{H}} f\right)(t, x_k, v_l) \\ &= \sum_{i=k-1}^{k+2} \partial_v f_{m+i,l}(t) \ell_i^A((m+i+\theta_k)\Delta x) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \{f_{m+k,l}(t) \dot{\phi}_0(\theta_k \Delta x) + f_{m+k+1,l}(t) \dot{\phi}_1(\theta_k \Delta x) \\ &\quad + \partial_x f_{m+k,l}(t) \dot{\psi}_0(\theta_k \Delta x) + \partial_x f_{m+k+1,l}(t) \dot{\psi}_1(\theta_k \Delta x)\}.\end{aligned}$$

avec $f_{k,l}(t) = f(t, x_k, v_l)$ et $\partial_x f_{k,l}(t) = (\partial_x f)(t, x_k, v_l)$.

Soit les deux problèmes de Poisson suivants

$$(P) = \begin{cases} \left(\frac{d}{dx} E_h^{n+1/2}\right)(x) = \int_v \tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n) dv - 1 \\ \int_0^L E_h^{n+1/2}(x) dx = 0. \end{cases}$$

et

$$(P') = \begin{cases} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} E_h^{n+1/2} \right) \right) (x) = \int_v \tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f_h(t^n) dv \\ \int_0^L \left(\frac{d}{dx} E_h^{n+1/2} \right) (x) dx = 0. \end{cases}$$

que l'on discrétise en utilisant une formule aux différences finies d'ordre quatre pour la dérivée en x et une formule de quadrature d'ordre quatre pour l'intégration en v . On se retrouve avec les deux systèmes suivants :

$$(P_h) = \begin{cases} \frac{1}{12\Delta x} \{8(E_h^{n+1/2}(x_{k+1}) - E_h^{n+1/2}(x_{k-1})) - (E_h^{n+1/2}(x_{k+2}) - E_h^{n+1/2}(x_{k-2}))\} = -1 \\ + \frac{\Delta v}{3} \left\{ \left(\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n) \right)_{k,0} + \left(\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n) \right)_{k,N_v} + 4 \sum_{l,\text{impair}} \left(\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n) \right)_{k,l} + 2 \sum_{l,\text{pair}} \left(\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n) \right)_{k,l} \right\}, \\ E_h^{n+1/2}(x_0) + E_h^{n+1/2}(x_{N_x}) + 4 \sum_{l,\text{impair}} E_h^{n+1/2}(x_l) + 2 \sum_{l,\text{pair}} E_h^{n+1/2}(x_l) = 0, \end{cases}$$

$$(P'_h) = \begin{cases} \frac{1}{12\Delta x} \{8(\partial_x E_h^{n+1/2}(x_{k+1}) - \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{k-1})) - (\partial_x E_h^{n+1/2}(x_{k+2}) - \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{k-2}))\} = \frac{\Delta v}{3} \\ \times \left\{ \left(\tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f_h(t^n) \right)_{k,0} + \left(\tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f_h(t^n) \right)_{k,N_v} + 4 \sum_{l,\text{impair}} \left(\tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f_h(t^n) \right)_{k,l} + 2 \sum_{l,\text{pair}} \left(\tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f_h(t^n) \right)_{k,l} \right\}, \\ \partial_x E_h^{n+1/2}(x_0) + \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{N_x}) + 4 \sum_{l,\text{impair}} \partial_x E_h^{n+1/2}(x_l) + 2 \sum_{l,\text{pair}} \partial_x E_h^{n+1/2}(x_l) = 0, \end{cases}$$

Comme on impose des conditions aux limites périodiques en x on a

$$\begin{aligned} E_h^{n+1/2}(x_{l+N_x+1}) &= E_h^{n+1/2}(x_l), \quad l \in \mathbb{Z} \\ \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{l+N_x+1}) &= \partial_x E_h^{n+1/2}(x_l), \quad l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Finalement on construit $E_h^{n+1/2}(x)$ en utilisant l'opérateur d'interpolation d'Hermite $\mathcal{I}_h^{\mathcal{H}}$ et on a

$$\begin{aligned} E_h^{n+1/2}(x)|_{[x_i, x_{i+1}]} &= E_h^{n+1/2}(x_i)\phi_0(\theta\Delta x) + E_h^{n+1/2}(x_{i+1})\phi_1(\theta\Delta x) \\ &+ \partial_x E_h^{n+1/2}(x_i)\psi_0(\theta\Delta x) + \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{i+1})\psi_1(\theta\Delta x) \end{aligned}$$

avec $x = x_i + \theta\Delta x$ et $0 \leq \theta \leq 1$.

On pose

$$v_l - \Delta t E_h^{n+1/2}(x_k) = v_{l+m} + \theta_l \Delta v.$$

On définit alors les opérateurs de transports $\widehat{\mathcal{T}}_2 \equiv \widehat{\mathcal{T}}_2^{0,0}$, $\widehat{\mathcal{T}}_2^{1,0}$, et $\widehat{\mathcal{T}}_2^{0,1}$, par

$$\widehat{\mathcal{T}}_2 f(t, x, v) = (\mathcal{I}_{0, \Delta t E_h} f)(t, x, v) = f\left(t, x, v - \Delta t E_h^{n+1/2}(x)\right)$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_2^{1,0} f(t, x, v) = \partial_x \widehat{\mathcal{T}}_2 f(t, x, v)$$

$$= (\mathcal{I}_{0, \Delta t E_h} \partial_x f)(t, x, v) - \Delta t \partial_x E_h^{n+1/2}(x) (\mathcal{I}_{0, \Delta t E_h} \partial_v f)(t, x, v)$$

$$= (\partial_x f)\left(t, x, v - \Delta t E_h^{n+1/2}(x)\right) - \Delta t \partial_x E_h^{n+1/2}(x) (\partial_v f)\left(t, x, v - \Delta t E_h^{n+1/2}(x)\right)$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_2^{0,1} f(t, x, v) = \partial_v \widehat{\mathcal{T}}_2 f(t, x, v)$$

$$= (\mathcal{I}_{0, \Delta t E_h} \partial_v f)(t, x, v) = (\partial_v f)\left(t, x, v - \Delta t E_h^{n+1/2}(x)\right)$$

et $\widetilde{\mathcal{T}}_2 \equiv \widetilde{\mathcal{T}}_2^{0,0}$, $\widetilde{\mathcal{T}}_2^{1,0}$, et $\widetilde{\mathcal{T}}_2^{0,1}$ par

$$\left(\widetilde{\mathcal{T}}_2 f(t)\right)_{k,l} = (\mathcal{I}_{0, \Delta t E_h} \pi_h^{\mathcal{H}} f)(t, x_k, v_l)$$

$$= f_{k,m+l}(t) \phi_0(\theta_l \Delta v) + f_{k,m+l+1}(t) \phi_1(\theta_l \Delta v)$$

$$+ \partial_v f_{k,m+l}(t) \psi_0(\theta_l \Delta v) + \partial_v f_{k,m+l+1}(t) \psi_1(\theta_l \Delta v)$$

$$\left(\widetilde{\mathcal{T}}_2^{1,0} f(t)\right)_{k,l} = (\mathcal{I}_{0, \Delta t E_h} \pi_h^{\mathcal{L}} \partial_x f)(t, x_k, v_l) - \Delta t \partial_x E_h^{n+1/2}(x_k) (\mathcal{I}_{0, \Delta t E_h} \partial_v \pi_h^{\mathcal{H}} f)(t, x_k, v_l)$$

$$= \sum_{i=l-1}^{l+2} \partial_x f_{k,m+i}(t) \ell_i^A((m+i+\theta_l)\Delta v)$$

$$- \Delta t \partial_x E_h^{n+1/2}(x_k) \{ \partial_v f_{k,m+l}(t) \dot{\phi}_0(\theta_l \Delta v) + f_{k,m+l+1}(t) \dot{\phi}_1(\theta_l \Delta v) \}$$

$$+ \partial_v f_{k,m+l}(t) \dot{\psi}_0(\theta_l \Delta v) + \partial_v f_{k,m+l+1}(t) \dot{\psi}_1(\theta_l \Delta v) \}$$

$$\left(\widetilde{\mathcal{T}}_2^{0,1} f(t)\right)_{k,l} = (\mathcal{I}_{0, \Delta t E_h} \pi_h^{\mathcal{L}} \partial_v f)(t, x_k, v_l)$$

$$+ f_{k,m+l}(t) \dot{\phi}_0(\theta_l \Delta v) + f_{k,m+l+1}(t) \dot{\phi}_1(\theta_l \Delta v)$$

$$+ \partial_v f_{k,m+l}(t) \dot{\psi}_0(\theta_l \Delta v) + \partial_v f_{k,m+l+1}(t) \dot{\psi}_1(\theta_l \Delta v).$$

avec $\partial_v f_{k,l}(t) = (\partial_v f)(t, x_k, v_l)$.

On introduit la notation suivante

$$\mathcal{T}^\alpha$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$ avec $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$ et où

$$\mathcal{T} \in \left\{ \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \tilde{\mathcal{T}}_1, \tilde{\mathcal{T}}_2, \hat{\mathcal{T}}_2 \right\}.$$

Par ailleurs on notera aussi

$$\nabla \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{T}^{1,0} \\ \mathcal{T}^{0,1} \end{pmatrix}.$$

Pour alléger les écritures on prendra la convention suivante

$$\partial^\alpha f \in \{\partial^{0,0} f, \partial^{1,0} f, \partial^{0,1} f\} = \{f, \partial_x f, \partial_v f\}$$

2.5.3 Le schéma numérique

Le schéma numérique est donné par

$$(\partial^\alpha f_h(t^{n+1}))_{k,l} = \left(\tilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \tilde{\mathcal{T}}_1^\alpha f_h(t^n) \right)_{k,l}, \quad |\alpha| \leq 1, \quad k \in [0, N_x], \quad l \in [0, N_v]$$

avec

$$(\partial^\alpha f_h^0) = (\partial^\alpha f_0)_{k,l} \quad |\alpha| \leq 1, \quad \text{une discrétisation de la donnée initiale } f_0,$$

$$\partial^\alpha f_h^n(x_0 + L, v_l) = \partial^\alpha f_h^n(x_0, v_l), \quad |\alpha| \leq 1, \quad \forall l \in [0, N_v]$$

la condition aux limites en x et

$$\partial^\alpha f_h^n(x, v_l) = 0, \quad \forall |v_l| > R, \quad \forall x \in [0, L], \quad |\alpha| \leq 1.$$

la condition aux limites en v .

2.5.4 Analyse de convergence

2.5.4.1 Théorème

On énonce le théorème

Théorème 35 *Supposons $f_0 \in \mathcal{C}_{c,per_x}^4(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v)$, positive, périodique par rapport à x de période L , alors la solution numérique du système de Vlasov-Poisson (f_h, E_h) , calculée par le schéma exposé dans la section 2.5.3, converge vers la solution périodique (f, E) du système de Vlasov-Poisson et il existe une constante $C = C\left(\|f\|_{\mathcal{C}^2(0,T;\mathcal{C}_b^4(\Omega))}\right)$ indépendante de $\Delta t, h$ telle que pour $|\alpha| \leq 1$ on ait*

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha f - \partial^\alpha f_h\|_{l^\infty(0,T;L_h^2(\Omega))} &\leq C \left(\Delta t^2 + \frac{\Delta x^{4-|\alpha|} + \Delta v^{4-|\alpha|}}{\Delta t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\Delta x^4 + \Delta v^4)}{\Delta x^{|\alpha|}} \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \right) \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha E - \partial^\alpha E_h\|_{l^\infty(0,T;L_h^\infty([0,L]))} &\leq C \left(\Delta t^2 + \Delta x^4 + \Delta v^4 + \Delta x^{4-|\alpha|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Delta x^{4-|\alpha|} + \Delta v^{4-|\alpha|}}{\Delta t} + \frac{(\Delta x^4 + \Delta v^4)}{\Delta x^{|\alpha|}} \left(1 + \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta t} \right) \right). \end{aligned}$$

2.5.4.2 Idée de la preuve

On veut évaluer l'erreur globale au temps t^{n+1}

$$\partial^\alpha e^{n+1} = \|\partial^\alpha f(t^{n+1}) - \partial^\alpha f_h(t^{n+1})\|_{L_h^2(\Omega)}.$$

Pour cela on décompose $\partial^\alpha f(t^{n+1}, x_k, v_l) - \partial^\alpha f_h(t^{n+1}, x_k, v_l)$ comme il suit

$$\begin{aligned} & \partial^\alpha f(t^{n+1}, x_k, v_l) - \partial^\alpha f_h(t^{n+1}, x_k, v_l) \\ &= \partial^\alpha f(t^{n+1}, x_k, v_l) - (\mathcal{T}_1^\alpha \circ \mathcal{T}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n))_{k,l} \end{aligned} \quad (I1)$$

$$+ (\mathcal{T}_1^\alpha \circ \mathcal{T}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n))_{k,l} - \left(\mathcal{T}_1^\alpha \circ \widehat{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) \right)_{k,l} \quad (I2)$$

$$+ \left(\mathcal{T}_1^\alpha \circ \widehat{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) \right)_{k,l} - \left(\widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha f(t^n) \right)_{k,l} \quad (I3)$$

$$+ \left(\widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha (f(t^n) - f_h(t^n)) \right)_{k,l} \quad (I4).$$

Afin d'estimer $\partial^\alpha e^{n+1}$ on estimera les quatre termes de droite de l'équation précédente. Ces estimations sont décrites dans les paragraphes suivants.

2.5.4.3 Estimations *a priori*

On commence par le lemme suivant qui donne une estimation du terme (I1), qui peut être assimilé à une erreur de discrétisation en temps.

Lemme 36 *On suppose que $f \in \mathcal{C}_b^4(0, T; \mathcal{C}_{c,per_x}^4(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v))$, alors il existe une constante C telle que pour $|\alpha| \leq 1$*

$$\|\partial^\alpha f(t^{n+1}) - \mathcal{T}_1^\alpha \circ \mathcal{T}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq C \Delta t^3$$

Preuve. D'une part on a

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, x, v) &= f(t^{n+1}, X(t^{n+1}; t^{n+1}, x, v), V(t^{n+1}, t^{n+1}, x, v)) \\ &= f(t^n, X(t^n; t^{n+1}, x, v), V(t^n; t^{n+1}, x, v)) \\ &= f(t^n, X(t^n), V(t^n)). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \nabla f(t^{n+1}, x, v) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(t^{n+1}, x, v) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(t^{n+1}, x, v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}(t^n) & \frac{\partial V}{\partial x}(t^n) \\ \frac{\partial X}{\partial v}(t^n) & \frac{\partial V}{\partial v}(t^n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(t^n, X(t^n), V(t^n)) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(t^n, X(t^n), V(t^n)) \end{pmatrix} \\ &= \nabla(X(t^n), V(t^n)) \nabla f(t^n, X(t^n), V(t^n)) \end{aligned}$$

On introduit \mathbb{T}_1 et \mathbb{T}_2 que l'on définit par

$$\mathbb{T}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{T}_1^{1,0} \\ \mathcal{T}_1^{0,1} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{T}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_2^{1,0} \\ \mathcal{T}_2^{0,1} \end{pmatrix}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_1 \circ \mathbb{T}_2 \circ \mathbb{T}_1 f(t^n) &= \mathbb{T}_1 \circ \mathbb{T}_2 \circ \mathbb{T}_1 f(t^n, x, v) \\ &= \mathbb{T}_1 \circ \mathbb{T}_2 \begin{pmatrix} f(t^n, x - v\Delta t/2, v) \\ (\partial_x f)(t^n, x - v\Delta t/2, v) \\ (\partial_v f)(t^n, x - v\Delta t/2, v) - \frac{\Delta t}{2}(\partial_x f)(t^n, x - v\Delta t/2, v) \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{T}_1 \begin{pmatrix} f(t^n, x - v\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{2}E(t^{n+1/2}, x), v - \Delta tE(t^{n+1/2}, x)) \\ (\partial_x f)(t^n, x - v\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{2}E(t^{n+1/2}, x), v - \Delta tE(t^{n+1/2}, x)) \\ -\Delta t\partial_x E(t^{n+1/2}, x) \\ \times \{(\partial_v f)(t^n, x - v\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{2}E(t^{n+1/2}, x), v - \Delta tE(t^{n+1/2}, x)) \\ -\frac{\Delta t}{2}(\partial_x f)(t^n, x - v\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{2}E(t^{n+1/2}, x), v - \Delta tE(t^{n+1/2}, x))\} \\ (\partial_v f)(t^n, x - v\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{2}E(t^{n+1/2}, x), v - \Delta tE(t^{n+1/2}, x)) \\ -\frac{\Delta t}{2}(\partial_x f)(t^n, x - v\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t^2}{2}E(t^{n+1/2}, x), v - \Delta tE(t^{n+1/2}, x)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f(t^n, \tilde{X}(t^n), \tilde{X}(t^n)) \\ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial x}(t^n)(\partial_x f)(t^n, \tilde{X}(t^n), \tilde{X}(t^n)) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial x}(t^n)(\partial_v f)(t^n, \tilde{X}(t^n), \tilde{X}(t^n)) \\ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial v}(t^n)(\partial_x f)(t^n, \tilde{X}(t^n), \tilde{X}(t^n)) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial v}(t^n)(\partial_v f)(t^n, \tilde{X}(t^n), \tilde{X}(t^n)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

$$\tilde{X}(t^n) = x - v\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}E(t^{n+1/2}, x - v\Delta t/2)$$

et

$$\tilde{V}(t^n) = v - \Delta tE(t^{n+1/2}, x - v\Delta t/2).$$

Un développement de Taylor donne alors

$$\begin{aligned} X(t^{n+1/2}) - (x - v\Delta t/2) &= X(t^{n+1/2}) - (X(t^{n+1}) - V(t^{n+1})\frac{\Delta t}{2}) \\ &= X(t^{n+1/2}) - \left(X(t^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2}\dot{X}(t^{n+1}) \right) \quad (2.153) \\ &= O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

En utilisant (2.153) on obtient

$$\begin{aligned}
V(t^n) - \tilde{V}(t^n) &= V(t^n) - \left(V(t^{n+1}) - \Delta t E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1}) - V(t^{n+1}) \frac{\Delta t}{2}) \right) \\
&= V(t^n) - \left(V(t^{n+1}) - \Delta t E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^2)) \right) \\
&= V(t^n) - \left(V(t^{n+1}) - \Delta t E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2})) \right) + O(\Delta t^3) \\
&= V(t^n) - V(t^{n+1}) + \Delta t \dot{V}(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sup \left\{ \left| \partial^\alpha V(t^n; t^{n+1}, x, v) - \partial^\alpha \tilde{V}(t^n; t^{n+1}, x, v) \right| \mid \forall (x, v) \in [0, L] \times [-R, R], |\alpha| \leq 1 \right\} \leq C \Delta t^3.$$

De même on a

$$\begin{aligned}
X(t^n) - \tilde{X}(t^n) &= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t V(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1}) - V(t^{n+1}) \frac{\Delta t}{2}) \right) \\
&= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t V(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2}) + O(\Delta t^2)) \right) \\
&= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t V(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} E(t^{n+1/2}, X(t^{n+1/2})) \right) + O(\Delta t^4) \\
&= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t \dot{X}(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}(t^{n+1/2}) \right) + O(\Delta t^4) \\
&= X(t^n) - \left(X(t^{n+1}) - \Delta t \dot{X}(t^{n+1}) + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{X}(t^{n+1}) \right) + O(\Delta t^3).
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\sup \left\{ \left| \partial^\alpha X(t^n) - \partial^\alpha \tilde{X}(t^n) \right| \mid \forall (x, v) \in [0, L] \times [-R, R], |\alpha| \leq 1 \right\} \leq C \Delta t^3.$$

On note

$$X_{k,l}(t^n) = X(t^n; t^{n+1}, x_k, v_l), \quad V_{k,l}(t^n) = V(t^n; t^{n+1}, x_k, v_l).$$

Finalement on en déduit que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} &= f(t^n, X_{k,l}(t^n) + O(\Delta t^3), V_{k,l}(t^n) + O(\Delta t^3)) \\
&= f(t^n, X_{k,l}(t^n), V_{k,l}(t^n)) + \nabla f(t^n, X_{k,l}(t^n), V_{k,l}(t^n)) \cdot O(\Delta t^3) \\
&= f(t^{n+1}, X_{k,l}(t^{n+1}), V_{k,l}(t^{n+1})) + \nabla f(t^n, X_{k,l}(t^n), V_{k,l}(t^n)) \cdot O(\Delta t^3) \\
&= f(t^{n+1}, x_k, v_l) + \nabla f(t^n, X_{k,l}(t^n), V_{k,l}(t^n)) \cdot O(\Delta t^3)
\end{aligned}$$

et

$$\|f(t^{n+1}) - \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq C \Delta t^3 \|\nabla f\|_{l^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))}.$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
\left| \nabla f(t^{n+1}, x_k, v_l) - (\nabla \mathcal{T}_1 \circ \nabla \mathcal{T}_2 \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} \right| &\leq \\
&\left| \left(\nabla \tilde{X}_{k,l}(t^n), \nabla \tilde{V}_{k,l}(t^n) \right) - \left(\nabla X_{k,l}(t^n), \nabla V_{k,l}(t^n) \right) \right| \cdot \left| \nabla f \left(t^n, \tilde{X}_{k,l}(t^n), \tilde{V}_{k,l}(t^n) \right) \right| \\
&+ \left| \left(\nabla X_{k,l}(t^n), \nabla V_{k,l}(t^n) \right) \right| \cdot \left| \nabla f \left(t^n, \tilde{X}_{k,l}(t^n), \tilde{V}_{k,l}(t^n) \right) - \nabla f \left(t^n, X_{k,l}(t^n), V_{k,l}(t^n) \right) \right| \\
&\leq C \Delta t^3 \left(\|\nabla f\|_{l^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))} + \|\nabla^2 f\|_{l^\infty(0, T; L_h^2(\Omega))} \right),
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

On continue avec une proposition qui va caractériser la stabilité des opérateurs d'interpolation.

Proposition 37 Soit $\pi_h^{\mathcal{H}}$ et $\pi_h^{\mathcal{L}}$ les opérateurs d'interpolation et $\tau_{\mu,\nu}$ l'opérateur de translation définis dans la section 2.5.2.1. Alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(0, T; \mathcal{C}_b^1(\Omega))$, on a

$$\|\tau_{\mu,0}\pi_h^{\mathcal{L}}f\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.154)$$

$$\|\tau_{\mu,0}\pi_h^{\mathcal{H}}f\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.155)$$

$$\|\tau_{\mu,0}\partial_x\pi_h^{\mathcal{H}}f\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|\partial_x f\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.156)$$

$$\|\tau_{0,\nu}\pi_h^{\mathcal{L}}f\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.157)$$

$$\|\tau_{0,\nu}\pi_h^{\mathcal{H}}f\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.158)$$

$$\|\tau_{0,\nu}\partial_v\pi_h^{\mathcal{H}}f\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|\partial_v f\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.159)$$

Preuve. On ne démontrera que les estimations (2.154)-(2.156), car les inégalités (2.157)-(2.159) se démontrent exactement de la même façon.

Commençons par l'estimation (2.154). On a

$$\|\tau_{\mu,0}\pi_h^{\mathcal{L}}f\|_{L_h^2(\Omega)} = \|\pi_h^{\mathcal{L}}f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\mu,0}}.$$

En utilisant la décomposition de f en série de Fourier

$$f_{i,j} = \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\omega| \leq N/2} \widehat{f}(\omega) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{i,j} \rangle}$$

on obtient

$$\begin{aligned} (\pi_h^{\mathcal{L}}f)_{i+\mu_j,j} &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{k=i-1}^{i+2} \widehat{f}(\omega) \ell_k^A(x_i + \mu_j \Delta x) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{k,j} \rangle} \\ &= \frac{1}{|\Omega|^{1/2}} \sum_{|\omega| \leq N/2} \widehat{f}(\omega) \varrho(\mu_j, \omega_x) e^{i\langle \mathbf{k}(\omega), \mathbf{z}_{i-1,j} \rangle} \end{aligned}$$

où

$$\varrho(\mu_j, \omega_x) = \sum_{k=0}^3 \ell_k^A((1 + \mu_j)\Delta x) e^{ik_x(\omega_x)x_k}.$$

Par conséquent on obtient

$$\begin{aligned} \|\pi_h^{\mathcal{L}}f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\mu,0}}^2 &= \Delta x \Delta v \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} (\pi_h^{\mathcal{L}}f)_{i+\mu_j,j} \overline{(\pi_h^{\mathcal{L}}f)_{i+\mu_j,j}} \\ &= \frac{\Delta x \Delta v}{|\Omega|} \sum_{i=0}^{N_x} \sum_{j=0}^{N_v} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{|\omega'| \leq N/2} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{f}(\omega')} \varrho(\mu_j, \omega_x) \overline{\varrho(\mu_j, \omega'_x)} \\ &\quad e^{-i\langle \mathbf{k}(\omega) - \mathbf{k}(\omega'), (1,0) \rangle} e^{i\langle \mathbf{k}(\omega) - \mathbf{k}(\omega'), \mathbf{z}_{i,j} \rangle}. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\Delta x}{|L|} \sum_{i=0}^{N_x} e^{i(k_x(\omega_x) - k_x(\omega'_x))x_i} = \delta_{\omega_x, \omega'_x}$$

on obtient

$$\|\pi_h^{\mathcal{L}} f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\mu, 0}}^2 = \frac{\Delta v}{|2R|} \sum_{j=0}^{N_v} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{|\omega'_v| \leq N_v/2} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{f}(\omega_x, \omega'_v)} |\varrho(\mu_j, \omega_x)|^2 e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v))v_j}$$

Puisqu' on a

$$\frac{\Delta v}{|2R|} \sum_{j=0}^{N_v} e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v))v_j} = \delta_{\omega_v, \omega'_v}$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} \|\pi_h^{\mathcal{L}} f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\mu, 0}}^2 &\leq \sup\{|\varrho(\mu, \omega_x)|^2, |\omega_x \Delta x| \leq L/2, 0 \leq \mu \leq 1\} \\ &\times \frac{\Delta v}{|2R|} \sum_{j=0}^{N_v} \sum_{|\omega| \leq N/2} \sum_{|\omega'_v| \leq N_v/2} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{f}(\omega_x, \omega'_v)} e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v))v_j} \\ &\leq \sup\{|\varrho(\mu, \omega_x)|^2, |\omega_x \Delta x| \leq L/2, 0 \leq \mu \leq 1\} \sum_{|\omega| \leq N/2} |\widehat{f}(\omega)|^2 \\ &\leq \sup\{|\varrho(\mu, \omega_x)|^2, |\omega_x \Delta x| \leq L/2, 0 \leq \mu \leq 1\} \|f\|_{L_h^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Comme dans le cas du lemme 21, sans perte de généralité on pose $L = 2\pi$, $\Delta x = h$, $\xi = \omega_x h$ et $\zeta = \mu - 1/2$. Il faut alors montrer que

$$\sup\{|\varrho(\zeta, \xi)|, |\xi| \leq \pi, |\zeta| \leq 1/2\} \leq 1$$

avec

$$\varrho(\zeta, \xi) = \sum_{k=-3/2}^{3/2} \ell_k^4(\zeta) e^{ik\xi},$$

et où

$$\ell_k^4(\zeta) = \prod_{\substack{i=-3/2 \\ i \neq k}}^{3/2} \frac{(\zeta - i)}{(k - i)}, \quad k \in \{-3/2, -1/2, 1/2, 3/2\}.$$

Ceci a déjà été fait dans le lemme 21. En procédant de la même façon que précédemment on obtient

$$\begin{aligned} \|\tau_{\mu, 0} \pi_h^{\mathcal{H}} f\|_{L_h^2(\Omega)} &= \|\pi_h^{\mathcal{H}} f\|_{L_h^2, \Delta_h^{\mu, 0}} \\ &\leq \sup\{|\mathcal{Q}(\mu, \xi, h)|, 0 \leq \mu \leq 1, |\xi| \leq \pi\} \left(\sum_{|\omega| \leq N/2} |\widehat{f}(\omega)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sup\{|\mathcal{Q}(\mu, \xi, h)|, 0 \leq \mu \leq 1, |\xi| \leq \pi\} \|f\|_{L_h^2(\Omega)} \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{Q}(\mu, \xi, h) = \phi_0(\mu h) + \phi_1(\mu h)e^{i\xi} + i\frac{\xi}{h}\psi_0(\mu h) + i\frac{\xi}{h}\psi_1(\mu h)e^{i\xi}$$

et

$$\begin{aligned} \|\tau_{\mu,0}\partial_x\pi_h^{\mathcal{H}}f\|_{L_h^2} &= \|\partial_x\pi_h^{\mathcal{H}}f\|_{L_h^2,\Delta_h^{\mu,0}} \\ &\leq \sup\{|\widehat{\mathcal{Q}}(\mu, \xi, h)|, 0 \leq \mu \leq 1, |\xi| \leq \pi\} \left(\sum_{|\omega| \leq \mathbf{N}/2} |\omega_x|^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sup\{|\widehat{\mathcal{Q}}(\mu, \xi, h)|, 0 \leq \mu \leq 1, |\xi| \leq \pi\} \|\partial_x f\|_{L_h^2(\Omega)} \end{aligned}$$

où

$$|\widehat{\mathcal{Q}}(\mu, \xi, h)| \cdot |\xi| = |\dot{\mathcal{Q}}(\mu, \xi, h)|,$$

avec

$$\dot{\mathcal{Q}}(\mu, \xi, h) = \dot{\phi}_0(\mu h) + \dot{\phi}_1(\mu h)e^{i\xi} + i\xi\dot{\psi}_0(\mu h) + i\xi\dot{\psi}_1(\mu h)e^{i\xi}.$$

Il faut donc montrer que

$$\mathcal{Q}_{\text{sup}} = \sup\{|\mathcal{Q}(\mu, \xi, h)|, 0 \leq \mu \leq 1, |\xi| \leq \pi\} \leq 1$$

et

$$\widehat{\mathcal{Q}}_{\text{sup}} = \sup\{|\widehat{\mathcal{Q}}(\mu, \xi, h)|, 0 \leq \mu \leq 1, |\xi| \leq \pi\} \leq 1$$

Commençons par \mathcal{Q}_{sup} . D'abord on remarque que \mathcal{Q} se réécrit comme

$$\mathcal{Q}(\mu, \xi, h) = \mathcal{Q}(\mu, \xi) = (1+2\mu)(1-\mu)^2 + (3-2\mu)\mu^2 e^{i\xi} + i\xi\mu(1-\mu)^2 + i\xi\mu^2(\mu-1)e^{i\xi}.$$

En prenant le module de \mathcal{Q} , après quelques manipulations algébriques on obtient

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}(\mu, \xi)|^2 &= 1 - \mu^2(1-\mu)^2 \{2(1-\cos\xi)(3-2\mu)(1+2\mu) - \xi^2(4\mu^2 - 4\mu + 1) \\ &\quad - 2\xi^2(1-\cos\xi)\mu(1-\mu) - 2\xi\sin\xi(-4\mu^2 + 4\mu + 1)\}. \end{aligned}$$

On fait le changement de variable suivant. On pose $\nu = \mu - 1/2$. Après quelques manipulations algébriques on trouve

$$|\mathcal{Q}(\nu, \xi)|^2 = 1 - \left(\left(\frac{1}{2} \right)^2 - \nu^2 \right)^2 \sigma(\nu, \xi)$$

où

$$\sigma(\nu, \xi) = -\nu^2(4\sin(\xi/2) - 2\xi\sin(\xi/2))^2 + 8(1-\cos\xi) - \frac{1}{2}\xi^2(1-\cos\xi) - 4\xi\sin^2\xi.$$

Pour montrer que $\mathcal{Q}_{\text{sup}} \leq 1$ il suffit alors de montrer que $\sigma \geq 0$, $\forall |\xi| \leq \pi$, $|\nu| \leq 1/2$. Puisque σ est un polynôme du second degré en ν dont le terme en ν^2 est négatif il suffit de montrer que pour tout ξ , tel que $|\xi| \leq \pi$ les racines de σ sont réelles et de module supérieur ou égal à $1/2$. Les racines de σ sont

$$\nu_r(\xi) = \pm \sqrt{\frac{-8(1-\cos\xi) + \frac{1}{2}\xi^2(1-\cos\xi) + 4\xi\sin^2\xi}{-\nu^2(4\sin(\xi/2) - 2\xi\sin(\xi/2))^2}}.$$

Il faut alors montrer que

$$|\nu_r(\xi)|^2 > \frac{1}{4} \quad (2.160)$$

L'inégalité (2.160) est équivalente à

$$g(\xi) \leq 0$$

où

$$g(\xi) = -6(1 - \cos \xi) + \xi^2 + 2\xi \sin \xi.$$

Pour montrer que g est négative on fait l'étude de la fonction g . Pour cela on a besoin de dériver g trois fois. On a

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\xi}(\xi) &= -4 \sin \xi + 2\xi + 2\xi \cos \xi \\ \frac{d^2g}{d\xi^2}(\xi) &= -2 \cos \xi + 2 - 2\xi \sin \xi \\ \frac{d^3g}{d\xi^3}(\xi) &= -2\xi \cos \xi \end{aligned}$$

ξ	$-\pi$	α_1	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	α_2	π
$\frac{d^3g}{d\xi^3}(\xi)$	-2π	$-$	0	$+$	0	$-$	2π
$\frac{d^2g}{d\xi^2}(\xi)$	4	0	$2 - \pi$	0	$2 - \pi$	0	4
$\frac{dg}{d\xi}(\xi)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(\xi)$	$-$	0	$-$	0	$-$	0	$-$

Montrons maintenant que $\widehat{Q}_{sup} \leq 1$. Pour montrer que $\widehat{Q}_{sup} \leq 1$ il suffit de montrer que

$$|\dot{Q}(\mu, \xi, h)|^2 - |\xi|^2 \leq 0, \quad \forall |\xi| \leq \pi, \quad 0 \leq \mu \leq 1.$$

En fait $\dot{Q}(\mu, \xi, h)$ s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{Q}(\mu, \xi, h) &= \dot{Q}(\mu, \xi) \\ &= 6\mu(\mu - 1) + 6\mu(1 - \mu)e^{i\xi} + i\xi(1 - \mu)(1 - 3\mu) + i\xi\mu(3\mu - 2)e^{i\xi} \end{aligned}$$

En prenant le module de \dot{Q} , on trouve

$$\begin{aligned} |\dot{Q}(\mu, \xi)|^2 &= 72\mu^2(1 - \mu)^2(1 - \cos \xi) + 12\xi \sin \xi \mu(1 - \mu)(6\mu^2 - 6\mu + 1) \\ &+ \xi^2(1 - 6\mu + 6\mu^2)^2 + 2(\cos \xi - 1)\xi^2\mu(1 - \mu)(1 - 3\mu)(3\mu - 2) \end{aligned}$$

En faisant le changement de variable $\mu \rightarrow \nu + 1/2$, après quelques manipulations algébriques on trouve

$$|\dot{Q}(\nu, \xi)|^2 - |\xi|^2 = a(\xi)\nu^4 + b(\xi)\nu^2 + c(\xi)$$

où

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \left[12 \sin \frac{\xi}{2} - 6\xi \cos \frac{\xi}{2} \right]^2 \\ b(\xi) &= \left[-2 \left(6 \sin \frac{\xi}{2} - 2\xi \cos \frac{\xi}{2} \right)^2 + \xi^2 \left(1 + \sin^2 \frac{\xi}{2} \right) \right] \\ c(\xi) &= \left[\left(3 \sin \frac{\xi}{2} - \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} \right)^2 - \xi^2 \right]. \end{aligned}$$

Tout d'abord on remarque que

$$\left| \dot{Q} \left(\pm \frac{1}{2}, \xi \right) \right|^2 - |\xi|^2 = 0$$

Par conséquent $|\dot{Q}|^2 - |\xi|^2$ s'écrit

$$|\dot{Q}(\nu, \xi)|^2 - |\xi|^2 = \left(\nu^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) (\nu^2 + \beta(\xi)).$$

Montrons maintenant que β est positif. D'après un résultat sur les équations du second ordre on a

$$-\frac{1}{4}\beta(\xi) = a(\xi)c(\xi).$$

Il reste donc à montrer que $c(\xi) \leq 0$, $\forall |\xi| \leq \pi$. On a $c(\xi) = l_1(\xi)l_2(\xi)$ où

$$\begin{aligned} l_1(\xi) &= 3 \sin \frac{\xi}{2} - \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} - \xi \\ l_2(\xi) &= 3 \sin \frac{\xi}{2} - \frac{\xi}{2} \cos \frac{\xi}{2} + \xi \end{aligned}$$

Pour étudier les signes de l_1 et l_2 on aura besoin de calculer les dérivées jusqu'à l'ordre trois.

$$\begin{aligned} \frac{dl_1}{d\xi} &= \cos \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{4} \sin \frac{\xi}{2} - 1 \\ \frac{dl_2}{d\xi} &= \cos \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{4} \sin \frac{\xi}{2} + 1 \\ \frac{d^2 l_1}{d\xi^2} &= \frac{d^2 l_2}{d\xi^2} = -\frac{1}{4} \sin \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{8} \cos \frac{\xi}{2} \\ \frac{d^3 l_1}{d\xi^3} &= \frac{d^3 l_2}{d\xi^3} = -\frac{\xi}{16} \sin \frac{\xi}{2} \end{aligned}$$

ξ	$-\pi$	0	π
$\frac{d^3 l_1}{d\xi^3}(\xi)$	—	0	—
$\frac{d^2 l_1}{d\xi^2}(\xi)$			
$\frac{dl_1}{d\xi}(\xi)$			
$\frac{dl_2}{d\xi}(\xi)$			
l_1			
l_2			
$c = l_1 l_2$	—	0	—

Finalement on a

$$|\dot{Q}(\nu, \xi)|^2 - |\xi|^2 \leq 0, \quad |\nu| \leq 1/2, \quad |\xi| \leq \pi.$$

■

On continue avec le lemme suivant qui donne une estimations du terme (I2).

Lemme 38 Soit $f \in \mathcal{C}_b(0, T; \mathcal{C}_b^2(\Omega))$, alors

$$\begin{aligned}
& \left\| \mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - \mathcal{T}_1 \circ \widehat{\mathcal{T}}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
& \leq C \Delta t \left(\Delta t^2 + \Delta x^4 + \Delta v^4 + \Delta x^5 + \Delta x \Delta v^4 + \left\| (\mathcal{T}_1 - \widetilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right. \\
& \quad + \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \Delta x \left\| (\mathcal{T}_1^{1,0} - \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0}) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
& \quad \left. + \Delta x \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left\| \nabla \mathcal{T}_1 \circ \nabla \mathcal{T}_2 \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n) - \nabla \mathcal{T}_1 \circ \nabla \widehat{\mathcal{T}}_2 \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
& \leq C \Delta t \left(\Delta t^2 + \Delta x^3 + \Delta x^{-1} \Delta v^4 + \Delta v^4 + \Delta x^4 + \Delta x^{-1} \left\| (\mathcal{T}_1 - \widetilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right. \\
& \quad \left. + \Delta x^{-1} \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \left\| (\mathcal{T}_1^{1,0} - \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0}) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right. \\
& \quad \left. + \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right)
\end{aligned}$$

Preuve. On introduit les courbes caractéristiques $(\widehat{X}(t^n), \widehat{V}(t^n))$ définies par

$$\begin{aligned}
\widehat{X}(t^n, x, v) &= x - v \Delta t - \frac{1}{2} \Delta t^2 E_h^{n+1/2}(x - v \Delta t / 2) \\
\widehat{V}(t^n, x, v) &= v - \Delta t E_h^{n+1/2}(x - v \Delta t / 2)
\end{aligned}$$

En reprenant la philosophie du lemme 36 on a

$$\begin{aligned}
(\mathcal{T}_1 \circ \widehat{\mathcal{T}}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} &= f(t^n, \widehat{X}_{k,l}(t^n), \widehat{V}_{k,l}(t^n)), \\
(\nabla \mathcal{T}_1 \circ \nabla \widehat{\mathcal{T}}_2 \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} &= \nabla (\widehat{X}_{k,l}(t^n), \widehat{V}_{k,l}(t^n)) \nabla f(t^n, \widehat{X}_{k,l}(t^n), \widehat{V}_{k,l}(t^n)).
\end{aligned}$$

Par conséquent on peut écrire

$$\begin{aligned}
& \left| (\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} - (\mathcal{T}_1 \circ \widehat{\mathcal{T}}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} \right| \\
& \leq \left| \nabla f(\widetilde{X}_{k,l}(t^n), \widetilde{V}_{k,l}(t^n)) \right| \cdot \left(\left| \widehat{X}_{k,l}(t^n) - \widetilde{X}_{k,l}(t^n) \right| + \left| \widehat{V}_{k,l}(t^n) - \widetilde{V}_{k,l}(t^n) \right| \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left| (\nabla \mathcal{T}_1 \circ \nabla \mathcal{T}_2 \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} - (\nabla \mathcal{T}_1 \circ \nabla \widehat{\mathcal{T}}_2 \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} \right| \\
& \leq \left| \nabla f(\widetilde{X}_{k,l}(t^n), \widetilde{V}_{k,l}(t^n)) \right| \cdot \left(\left| \nabla \widehat{X}_{k,l}(t^n) - \nabla \widetilde{X}_{k,l}(t^n) \right| + \left| \nabla \widehat{V}_{k,l}(t^n) - \nabla \widetilde{V}_{k,l}(t^n) \right| \right) \\
& \quad + \left| \nabla f(\widetilde{X}_{k,l}(t^n), \widetilde{V}_{k,l}(t^n)) - \nabla f(\widehat{X}_{k,l}(t^n), \widehat{V}_{k,l}(t^n)) \right| \cdot \left| \nabla (\widetilde{X}_{k,l}(t^n), \widetilde{V}_{k,l}(t^n)) \right| \\
& \leq \left| \nabla f(\widetilde{X}_{k,l}(t^n), \widetilde{V}_{k,l}(t^n)) \right| \cdot \left(\left| \nabla \widehat{X}_{k,l}(t^n) - \nabla \widetilde{X}_{k,l}(t^n) \right| + \left| \nabla \widehat{V}_{k,l}(t^n) - \nabla \widetilde{V}_{k,l}(t^n) \right| \right) \\
& \quad + \left(\left| \widehat{X}_{k,l}(t^n) - \widetilde{X}_{k,l}(t^n) \right| + \left| \widehat{V}_{k,l}(t^n) - \widetilde{V}_{k,l}(t^n) \right| \right) \\
& \quad \cdot \left| \nabla^2 f(\widetilde{X}_{k,l}(t^n), \widetilde{V}_{k,l}(t^n)) \right| \cdot \left| \nabla (\widetilde{X}_{k,l}(t^n), \widetilde{V}_{k,l}(t^n)) \right|
\end{aligned}$$

Cherchons à estimer $\left| \partial^\alpha \widehat{X}_{k,l}(t^n) - \partial^\alpha \widetilde{X}_{k,l}(t^n) \right|$ et $\left| \partial^\alpha \widehat{V}_{k,l}(t^n) - \partial^\alpha \widetilde{V}_{k,l}(t^n) \right|$. En utilisant la définition de $\left(\widetilde{X}(t^n), \widetilde{V}(t^n) \right)$ et de $\left(\widehat{X}(t^n), \widehat{V}(t^n) \right)$ on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\left| \widehat{X}_{k,l}(t^n) - \widetilde{X}_{k,l}(t^n) \right| + \left| \widehat{V}_{k,l}(t^n) - \widetilde{V}_{k,l}(t^n) \right| \right) \\ & \leq C\Delta t \left| E_h^{n+1/2}(x_k - v_k\Delta t/2) - E(t^{n+1/2}, x_k - v_k\Delta t/2) \right| \\ & \leq C\Delta t \left\| E_h^{n+1/2}(x) - E(t^{n+1/2}, x) \right\|_{L^\infty} \\ & \leq C\Delta t \left(\left\| E(t^{n+1/2}, x) - \widetilde{E}(t^{n+1/2}, x) \right\|_{L^\infty} + \left\| \widetilde{E}(t^{n+1/2}, x) - E_h^{n+1/2}(x) \right\|_{L^\infty} \right), \end{aligned} \tag{2.161}$$

$$\begin{aligned} & \left(\left| \partial_x \widehat{X}_{k,l}(t^n) - \partial_x \widetilde{X}_{k,l}(t^n) \right| + \left| \partial_x \widehat{V}_{k,l}(t^n) - \partial_x \widetilde{V}_{k,l}(t^n) \right| \right) \\ & \leq C\Delta t \left| \partial_x E_h^{n+1/2}(x_k - v_k\Delta t/2) - \partial_x E(t^{n+1/2}, x_k - v_k\Delta t/2) \right| \\ & \leq C\Delta t \left\| \partial_x E_h^{n+1/2}(x) - \partial_x E(t^{n+1/2}, x) \right\|_{L^\infty} \\ & \leq C\Delta t \left(\left\| \partial_x E(t^{n+1/2}, x) - \partial_x \widetilde{E}(t^{n+1/2}, x) \right\|_{L^\infty} + \left\| \partial_x \widetilde{E}(t^{n+1/2}, x) - \partial_x E_h^{n+1/2}(x) \right\|_{L^\infty} \right) \end{aligned} \tag{2.162}$$

et

$$\begin{aligned} & \left(\left| \partial_v \widehat{X}_{k,l}(t^n) - \partial_v \widetilde{X}_{k,l}(t^n) \right| + \left| \partial_v \widehat{V}_{k,l}(t^n) - \partial_v \widetilde{V}_{k,l}(t^n) \right| \right) \\ & \leq C\Delta t^2 \left| \partial_x E_h^{n+1/2}(x_k - v_k\Delta t/2) - \partial_x E(t^{n+1/2}, x_k - v_k\Delta t/2) \right| \\ & \leq C\Delta t^2 \left\| \partial_x E_h^{n+1/2}(x) - \partial_x E(t^{n+1/2}, x) \right\|_{L^\infty} \\ & \leq C\Delta t^2 \left(\left\| \partial_x E(t^{n+1/2}, x) - \partial_x \widetilde{E}(t^{n+1/2}, x) \right\|_{L^\infty} + \left\| \partial_x \widetilde{E}(t^{n+1/2}, x) - \partial_x E_h^{n+1/2}(x) \right\|_{L^\infty} \right) \end{aligned} \tag{2.163}$$

où $\widetilde{E}(t^{n+1/2}, x)$ et $\partial_x \widetilde{E}(t^{n+1/2}, x)$ sont solutions des problèmes de Poisson

$$(\widetilde{P}) = \begin{cases} \left(\frac{d}{dx} \widetilde{E} \right) (t^{n+1/2}, x) = \int_v \mathcal{T}_1 f(t^n, x, v) dv - 1 = \int_v f(t^n, x - v\Delta t/2, v) dv - 1 \\ \int_0^L \widetilde{E}(t^{n+1/2}, x) dx = 0. \end{cases}$$

et

$$(\widetilde{P}') = \begin{cases} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \widetilde{E} \right) \right) (t^{n+1/2}, x) = \int_v \mathcal{T}_1^{1,0} f(t^n, x, v) dv = \int_v \partial_x f(t^n, x - v\Delta t/2, v) dv \\ \int_0^L \left(\frac{d}{dx} \widetilde{E} \right) (t^{n+1/2}, x) dx = 0. \end{cases}$$

On cherche d'abord à estimer $\left\| E(t^{n+1/2}, x) - \widetilde{E}(t^{n+1/2}, x) \right\|_{L^\infty}$ et

$$\left\| \partial_x E(t^{n+1/2}, x) - \partial_x \tilde{E}(t^{n+1/2}, x) \right\|_{L^\infty}. \text{ En utilisant l'équation de Vlasov il vient}$$

$$\frac{f(t^{n+1/2}, x, v) - f(t^n, x - v\Delta t/2, v)}{\Delta t/2} = \partial_t f(t^{n+1/2}, x, v) + v\partial_x f(t^{n+1/2}, x, v) + O(\Delta t)$$

$$= -E(t^{n+1/2}, x)\partial_v f(t^{n+1/2}, x, v) + O(\Delta t).$$

et par suite

$$\left\| E(t^{n+1/2}) - \tilde{E}(t^{n+1/2}) \right\|_{L^\infty}$$

$$= \left\| \int_0^L K(x, y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t^{n+1/2}, y, v) - f(t^n, y - v\Delta t/2, v)] dv \right) dy \right\|_{L^\infty}$$

$$\leq C\Delta t^2.$$

De même en dérivant l'équation de Vlasov par rapport à x il vient

$$\frac{\partial_x f(t^{n+1/2}, x, v) - \partial_x f(t^n, x - v\Delta t/2, v)}{\Delta t/2} = -\partial_x E(t^{n+1/2}, x)\partial_v f(t^{n+1/2}, x, v)$$

$$- E(t^{n+1/2}, x)\partial_{vx} f(t^{n+1/2}, x, v) + O(\Delta t).$$

et par suite

$$\left\| \partial_x E(t^{n+1/2}) - \partial_x \tilde{E}(t^{n+1/2}) \right\|_{L^\infty}$$

$$= \left\| \int_0^L K(x, y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [\partial_x f(t^{n+1/2}, y, v) - \partial_x f(t^n, y - v\Delta t/2, v)] dv \right) dy \right\|_{L^\infty}$$

$$\leq C\Delta t^2.$$

Maintenant cherchons à estimer $\left\| E_h^{n+1/2}(x) - \tilde{E}(t^{n+1/2}, x) \right\|_{L^\infty}$ et

$$\left\| \partial_x E_h^{n+1/2}(x) - \partial_x \tilde{E}(t^{n+1/2}, x) \right\|_{L^\infty}.$$

Par la suite on utilisera les notations suivantes

$$\left\| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right\|_\infty = \max_k \left| \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_k) - E_h^{n+1/2}(x_k) \right|,$$

$$\left| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right|_{1,\infty} = \max_k \left| \partial_x \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_k) - \partial_x E_h^{n+1/2}(x_k) \right|.$$

et

$$\|\cdot\|_{1,\infty} = \|\cdot\|_\infty + |\cdot|_{1,\infty}.$$

Supposons que $x = x_k + \theta\Delta x$, avec $0 \leq \theta \leq 1$, on a alors

$$\left| \tilde{E}(t^{n+1/2}, x) - E_h^{n+1/2}(x) \right| \leq \left| \tilde{E}(t^{n+1/2}, x) - \phi_0(\theta\Delta x)\tilde{E}(t^{n+1/2}, x_k) \right.$$

$$\left. - \phi_1(\theta\Delta x)\tilde{E}(t^{n+1/2}, x_{k+1}) - \psi_0(\theta\Delta x)\partial_x \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_k) - \psi_1(\theta\Delta x)\partial_x \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_{k+1}) \right|$$

$$+ \left| \phi_0(\theta\Delta x) \left(\tilde{E}(t^{n+1/2}, x_k) - E_h^{n+1/2}(x_k) \right) + \phi_1(\theta\Delta x) \left(\tilde{E}(t^{n+1/2}, x_{k+1}) - E_h^{n+1/2}(x_{k+1}) \right) \right.$$

$$\left. + \psi_0(\theta\Delta x) \left(\partial_x \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_k) - \partial_x E_h^{n+1/2}(x_k) \right) \right.$$

$$\left. + \psi_1(\theta\Delta x) \left(\partial_x \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_{k+1}) - \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{k+1}) \right) \right|.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right\|_{L^\infty} &\leq C \left(\Delta x^4 \left\| \tilde{E} \right\|_{\mathcal{C}(0,T;\mathcal{C}^4([0,L]))} + \left\| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + \Delta x \left| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right|_{1,\infty} \right) \end{aligned}$$

De la même manière on montre que

$$\begin{aligned} \left\| \partial_x \tilde{E}(t^{n+1/2}) - \partial_x E_h^{n+1/2} \right\|_{L^\infty} &\leq C \left(\Delta x^4 \left\| \tilde{E} \right\|_{\mathcal{C}(0,T;\mathcal{C}^4([0,L]))} + \Delta x^{-1} \left\| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + \left| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right|_{1,\infty} \right) \end{aligned}$$

Maintenant on cherche à estimer $\left\| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right\|_\infty$ et $\left| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right|_{1,\infty}$.
Pour ce faire on procède comme il suit. On peut écrire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{12\Delta x} \left\{ 8 \left(\tilde{E}(t^{n+1/2}, x_{k+1}) - \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_{k-1}) \right) - \left(\tilde{E}(t^{n+1/2}, x_{k+2}) - \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_{k-2}) \right) \right\} \\ &= \partial_x \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_k) + O(\Delta x^4) \\ &= -1 + \int_v \mathcal{T}_1 f(t^n, x_k, v) dv + O(\Delta x^4) \\ &= -1 + O(\Delta x^4) + O(\Delta v^4) \\ &+ \frac{\Delta v}{3} \left\{ (\mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,0} + (\mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,N_v} + 4 \sum_{l,\text{impair}} (\mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} + 2 \sum_{l,\text{pair}} (\mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} \right\}. \end{aligned}$$

Si on pose $\delta E_k = \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_k) - \partial_x E_h^{n+1/2}(x_k)$ on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{12\Delta x} \{ 8(\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}) - (\delta E_{k+2} - \delta E_{k-2}) \} = O(\Delta x^4) + O(\Delta v^4) \\ &+ \frac{\Delta v}{3} \left\{ (\mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,0} - (\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n))_{k,0} + (\mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,N_v} - (\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n))_{k,N_v} \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{l,\text{impair}} \left[(\mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} - (\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n))_{k,l} \right] + 2 \sum_{l,\text{pair}} \left[(\mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} - (\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n))_{k,l} \right] \right\} \end{aligned} \tag{2.164}$$

Par ailleurs on a

$$\frac{1}{12\Delta x} |8(\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}) - (\delta E_{k+2} - \delta E_{k-2})| \geq \frac{1}{12\Delta x} |8|\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}| - |\delta E_{k+2} - \delta E_{k-2}|$$

En utilisant la périodicité de δE_k on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12\Delta x} \sum_{k=0}^{N_x} |\delta(\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}) - (\delta E_{k+2} - \delta E_{k-2})| \\
& \geq \frac{1}{12\Delta x} \sum_{k=0}^{N_x} |8|\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}| - |\delta E_{k+2} - \delta E_{k-2}|| \\
& \geq \frac{1}{12\Delta x} \left| 8 \sum_{k=0}^{N_x} |\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}| - \sum_{k=0}^{N_x} |\delta E_{k+2} - \delta E_{k-2}| \right| \\
& \geq \frac{1}{12\Delta x} \left\{ 8 \sum_{k=0}^{N_x} |\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}| - \sum_{k=0}^{N_x} |\delta E_{k+2} - \delta E_k| - \sum_{k=0}^{N_x} |\delta E_k - \delta E_{k-2}| \right\} \\
& \geq \frac{1}{2\Delta x} \sum_{k=0}^{N_x} |\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}|.
\end{aligned} \tag{2.165}$$

En utilisant (2.164), (2.165) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{N_x} |\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}| & \leq O(\Delta x^4) + O(\Delta v^4) + C\Delta x \Delta v \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_v} \left| (\mathcal{T}_1 f(t^n))_{k,l} - (\tilde{\mathcal{T}}_1 f_h(t^n))_{k,l} \right| \\
& \leq O(\Delta x^4) + O(\Delta v^4) + C \left(\left\| (\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^1(\Omega)} + \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^1(\Omega)} \right) \\
& \leq O(\Delta x^4) + O(\Delta v^4) + C\sqrt{|\Omega|} \left(\left\| (\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right)
\end{aligned} \tag{2.166}$$

On pose \mathcal{M} une valeur moyenne de δE_k

$$\mathcal{M} = \frac{\Delta v}{3L} \left\{ \delta E_0 + \delta E_{N_x} + 4 \sum_{l, \text{impair}} \delta E_l + 2 \sum_{l, \text{pair}} \delta E_l \right\},$$

alors on a

$$\min_k \delta E_k \leq |\mathcal{M}|$$

En utilisant une version discrète de la formule de Taylor avec reste intégral on obtient

$$\begin{aligned}
\max_k \delta E_k & \leq \min_k \delta E_k + \sum_{k=0}^{N_x} |\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}| \\
& \leq |\mathcal{M}| + \sum_{k=0}^{N_x} |\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}|.
\end{aligned} \tag{2.167}$$

Or d'après la condition aux limites pour E_h (voir le problème (P_h)) on a

$$\begin{aligned}
& \delta E_0 + \delta E_{N_x} + 4 \sum_{l, \text{impair}} \delta E_l + 2 \sum_{l, \text{pair}} \delta E_l \\
&= \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_0) + \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_{N_x}) + 4 \sum_{l, \text{impair}} \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_l) + 2 \sum_{l, \text{pair}} \tilde{E}(t^{n+1/2}, x_l) \\
&\quad - \left\{ E_h^{n+1/2}(x_0) + E_h^{n+1/2}(x_{N_x}) + 4 \sum_{l, \text{impair}} E_h^{n+1/2}(x_l) + 2 \sum_{l, \text{pair}} E_h^{n+1/2}(x_l) \right\} \\
&= \int_0^L \tilde{E}(t^{n+1/2}, x) dx + O(\Delta x^4) \\
&= O(\Delta x^4)
\end{aligned} \tag{2.168}$$

Finalement en utilisant (2.167) et (2.168) on obtient

$$|\delta E_k| \leq O(\Delta x^4) + \sum_{k=0}^{N_x} |\delta E_{k+1} - \delta E_{k-1}| \tag{2.169}$$

A partir de (2.169) et (2.166) on obtient

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right\|_{\infty} &\leq C \left(\Delta x^4 + \Delta v^4 + \left\| (\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right)
\end{aligned} \tag{2.170}$$

De la même manière on trouve

$$\begin{aligned}
\left| \tilde{E}(t^{n+1/2}) - E_h^{n+1/2} \right|_{1, \infty} &\leq C \left(\Delta x^4 + \Delta v^4 + \left\| (\mathcal{T}_1^{1,0} - \tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0}) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right. \\
&\quad \left. + \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right)
\end{aligned} \tag{2.171}$$

En utilisant (2.161)-(2.163) et (2.170)-(2.171) on obtient

$$\begin{aligned}
& \sup_{k,l} \left\{ \left| \hat{X}_{k,l}(t^n) - \tilde{X}_{k,l}(t^n) \right| + \left| \hat{V}_{k,l}(t^n) - \tilde{V}_{k,l}(t^n) \right| \right\} \\
&\leq C \Delta t \left(\Delta t^2 + \Delta x^4 + \Delta v^4 + \Delta x^5 + \Delta x \Delta v^4 + \left\| (\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right. \\
&\quad + \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \Delta x \left\| (\mathcal{T}_1^{1,0} - \tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0}) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\quad \left. + \Delta x \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \sup_{k,l} \left\{ \left| \nabla \widehat{X}_{k,l}(t^n) - \nabla \widetilde{X}_{k,l}(t^n) \right| + \left| \nabla \widehat{V}_{k,l}(t^n) - \nabla \widetilde{V}_{k,l}(t^n) \right| \right\} \\
& \leq C \Delta t \left(\Delta t^2 + \Delta x^3 + \Delta x^{-1} \Delta v^4 + \Delta v^4 + \Delta x^4 + \Delta x^{-1} \left\| (\mathcal{T}_1 - \widetilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \right. \\
& \quad \left. + \Delta x^{-1} \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \left\| (\mathcal{T}_1^{1,0} - \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0}) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right. \\
& \quad \left. + \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right)
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du lemme. ■

On continue avec la proposition suivante qui établit la stabilité des opérateurs de transport.

Proposition 39 *Soit $f \in \mathcal{C}_b(0, T, \mathcal{C}_b^1(\Omega))$ alors*

$$\|\mathcal{T}_1 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.172)$$

$$\|\mathcal{T}_2 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.173)$$

$$\|\widehat{\mathcal{T}}_2 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.174)$$

et il existe une constante C indépendante de h et Δt telle que

$$\|\widetilde{\mathcal{T}}_1 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.175)$$

$$\|\widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|\partial_x f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.176)$$

$$\|\widetilde{\mathcal{T}}_1^{0,1} f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|\partial_v f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} + C \Delta t \|\partial_x f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.177)$$

$$\|\widetilde{\mathcal{T}}_2 f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.178)$$

$$\|\widetilde{\mathcal{T}}_2^{1,0} f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|\partial_x f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} + C \Delta t \|\partial_v f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.179)$$

$$\|\widetilde{\mathcal{T}}_2^{0,1} f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|\partial_v f(t)\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.180)$$

Preuve. Commençons par l'inégalité (2.172). On pose $\mathbf{d}_{k,l} = (v_l \Delta t / 2, 0)$ alors

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}_1 f\|_{L_h^2(\Omega)}^2 &= \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_v} |f(t, x_k - v_l \Delta t / 2, v_l)|^2 \Delta x \Delta v \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_v} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \sum_{|\boldsymbol{\omega}'| \leq \mathbf{N}/2} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \overline{\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}')} e^{i(\mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}) - \mathbf{k}(\boldsymbol{\omega}'), \mathbf{z}_{k,l} - \mathbf{d}_{k,l})} \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{k=0}^{N_x} \sum_{l=0}^{N_v} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \sum_{|\boldsymbol{\omega}'| \leq \mathbf{N}/2} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \overline{\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}')} e^{i(k_x(\omega_x) - k_x(\omega'_x))(x_k - v_l \Delta t / 2)} e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v))v_l} \\
&= \frac{1}{|2R|} \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \sum_{|\boldsymbol{\omega}'| \leq \mathbf{N}/2} \delta_{\omega_x, \omega'_x} e^{i(k_v(\omega_v) - k_v(\omega'_v))v_l} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \overline{\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}')} \\
&= \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} \sum_{|\boldsymbol{\omega}'| \leq \mathbf{N}/2} \widehat{f}(\boldsymbol{\omega}) \overline{\widehat{f}(\boldsymbol{\omega}')} \delta_{\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}'} \\
&= \sum_{|\boldsymbol{\omega}| \leq \mathbf{N}/2} |\widehat{f}(\boldsymbol{\omega})|^2 = \|f\|_{L_h^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

Les estimations (2.173)-(2.174) se démontrent de la même manière que (2.172). En utilisant (2.155) on obtient

$$\left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1 f \right\|_{L_h^2(\Omega)} = \left\| \mathcal{T}_1 \pi_h^{\mathcal{H}} f \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)}$$

A partir de (2.156) il vient

$$\left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f \right\|_{L_h^2(\Omega)} = \left\| \mathcal{T}_1 \partial_x \pi_h^{\mathcal{H}} f \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|\partial_x f\|_{L_h^2(\Omega)}$$

Grâce à (2.154) on trouve

$$\begin{aligned}
\left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^{0,1} f \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \mathcal{T}_1 \pi_h^{\mathcal{L}} \partial_v f \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \frac{\Delta t}{2} \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq \|\partial_v f\|_{L_h^2(\Omega)} + C \Delta t \|\partial_x f\|_{L_h^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

En utilisant (2.155) on obtient

$$\left\| \widetilde{\mathcal{T}}_2 f \right\|_{L_h^2(\Omega)} = \left\| \widehat{\mathcal{T}}_2 \pi_h^{\mathcal{H}} f \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L_h^2(\Omega)}$$

Grâce à (2.158) on trouve

$$\left\| \widetilde{\mathcal{T}}_2^{0,1} f \right\|_{L_h^2(\Omega)} = \left\| \widehat{\mathcal{T}}_2 \partial_v \pi_h^{\mathcal{H}} f \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|\partial_v f\|_{L_h^2(\Omega)}$$

Maintenant montrons que $\left| E_h^{n+1/2} \right|_{1,\infty}$ est borné. Pour cela supposons que $\|\partial_x f_h(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)}$ est borné. Alors à partir du problème P'_h il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N_x} \left| \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{k+1}) - \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{k-1}) \right| &\leq 2L + C \Delta x \Delta v \sum_{k,l} \left| \left(\tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f_h(t^n) \right)_{k,l} \right| \\ &\leq L + C \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f_h(t^n) \right\|_{L_h^1(\Omega)} \\ &\leq L + C \sqrt{|\Omega|} \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} f_h(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq C \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} \left| E_h^{n+1/2} \right|_{1,\infty} &\leq \frac{\Delta v}{3L} \left| \partial_x E_h^{n+1/2}(x_0) + \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{N_x}) \right. \\ &\quad \left. + 4 \sum_{l,\text{impair}} \partial_x E_h^{n+1/2}(x_l) + 2 \sum_{l,\text{pair}} \partial_x E_h^{n+1/2}(x_l) \right| \\ &\quad + \sum_{k=0}^{N_x} \left| \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{k+1}) - \partial_x E_h^{n+1/2}(x_{k-1}) \right| \\ &\leq C. \end{aligned}$$

Maintenant démontrons l'inégalité (2.179). A partir de (2.157) il vient

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathcal{T}}_2^{1,0} f \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \hat{\mathcal{T}}_2 \pi_h^{\mathcal{L}} \partial_x f \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \frac{\Delta t}{2} \left\| \partial_x E_h^{n+1/2} \right\|_{\infty} \left\| \tilde{\mathcal{T}}_2^{0,1} f \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq \left\| \partial_x f \right\|_{L_h^2(\Omega)} + C \Delta t \left\| \partial_v f \right\|_{L_h^2(\Omega)} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. ■

On continue avec le lemme suivant qui donne une estimation de la précision des opérateurs de transport.

Lemme 40 *Soit $f \in \mathcal{C}_b(0, T; \mathcal{C}_b^A(\Omega))$, alors il existe une constante C indépendante de h et Δt telle que pour $|\alpha| \leq 1$ on ait*

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{T}_1^\alpha - \tilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \right) f(t) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq C \Delta x^{4-|\alpha|} \|f\|_{\mathcal{C}_b(0,T;\mathcal{C}_b^A(\Omega))} \\ \left\| \left(\hat{\mathcal{T}}_2^\alpha - \tilde{\mathcal{T}}_2^\alpha \right) f(t) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq C \Delta x^{4-|\alpha|} \|f\|_{\mathcal{C}_b(0,T;\mathcal{C}_b^A(\Omega))} \end{aligned}$$

Preuve. Si $f \in \mathcal{C}^{2m}([a, b])$ et si $\pi_h f$ est le polynôme d'Hermite de degré $2m - 1$ qui interpole f et ses $m - 1$ premières dérivées en a et b alors

$$\left\| f^{(j)} - \pi_h f^{(j)} \right\|_{L^\infty([a,b])} \leq \frac{\|f^{(2m)}\|_{L^\infty([a,b])}}{(2m-j)! 2^{2m-j}} h^{2m-j}, \quad 0 \leq j \leq 2m-1,$$

où $[j] = j$ si j est pair et $[j] = j + 1$ si j est impair. En utilisant les estimations de la proposition 39 on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1 \right) f(t) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \mathcal{T}_1 (f(t) - \pi_h^{\mathcal{H}} f(t)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq C \Delta x^4 \|f\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b^4(\Omega))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{T}_1^{1,0} - \tilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} \right) f(t) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \mathcal{T}_1 (\partial_x f(t) - \partial_x \pi_h^{\mathcal{H}} f(t)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq C \Delta x^3 \|f\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b^4(\Omega))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{T}_1^{0,1} - \tilde{\mathcal{T}}_1^{0,1} \right) f(t) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \mathcal{T}_1 (\partial_v f(t) - \pi_h^{\mathcal{L}} \partial_v f(t)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\quad + C \Delta t \left\| \mathcal{T}_1 (\partial_x f(t) - \partial_x \pi_h^{\mathcal{H}} f(t)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq C (\Delta t \Delta x^3 + \Delta x^4) \|f\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b^4(\Omega))} \\ &\leq C \Delta x^3 \|f\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b^4(\Omega))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{T}_2 - \tilde{\mathcal{T}}_2 \right) f(t) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \mathcal{T}_2 (f(t) - \pi_h^{\mathcal{H}} f(t)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq C \Delta v^4 \|f\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b^4(\Omega))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{T}_2^{0,1} - \tilde{\mathcal{T}}_2^{0,1} \right) f(t) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \mathcal{T}_2 (\partial_x f(t) - \partial_x \pi_h^{\mathcal{H}} f(t)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq C \Delta v^3 \|f\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b^4(\Omega))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{T}_2^{1,0} - \tilde{\mathcal{T}}_2^{1,0} \right) f(t) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \hat{\mathcal{T}}_2 (\partial_x f(t) - \pi_h^{\mathcal{L}} \partial_x f(t)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\quad + C \Delta t \left\| \partial_x E_h^{n+1/2} \right\|_{\infty} \left\| \hat{\mathcal{T}}_2 (\partial_v f(t) - \partial_v \pi_h^{\mathcal{H}} f(t)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ &\leq C (\Delta t \Delta v^3 + \Delta v^4) \|f\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b^4(\Omega))} \\ &\leq C \Delta v^3 \|f\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b^4(\Omega))} \end{aligned}$$

■

Maintenant on cherche à évaluer les quantités (I3)

$$\left\| \mathcal{T}_1^\alpha \circ \hat{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) - \tilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \tilde{\mathcal{T}}_1^\alpha f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} .$$

Lemme 41 *Soit $f \in \mathcal{C}_b(0, T; \mathcal{C}_b^4(\Omega))$, alors*

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{T}_1 \circ \widehat{\mathcal{T}}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) - \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2 \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ & \leq C \left(\Delta x^4 + \Delta v^4 + \Delta t \left(\Delta t^2 + \Delta x^4 + \Delta v^4 + \Delta x^5 + \Delta x \Delta v^4 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\| \left(\mathcal{T}_1 - \widetilde{\mathcal{T}}_1 \right) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Delta x \left\| \left(\mathcal{T}_1^{1,0} - \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} \right) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \Delta x \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla \mathcal{T}_1 \circ \nabla \widehat{\mathcal{T}}_2 \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n) - \nabla \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \nabla \widetilde{\mathcal{T}}_2 \circ \nabla \widetilde{\mathcal{T}}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\ & \leq C \left(\Delta x^3 + \Delta v^3 + \Delta t \left(\Delta t^2 + \Delta x^3 + \Delta x^{-1} \Delta v^4 + \Delta v^4 + \Delta x^4 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1 + \Delta x^{-1}) \left\| \left(\mathcal{T}_1 - \widetilde{\mathcal{T}}_1 \right) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + (1 + \Delta x^{-1}) \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left\| \left(\mathcal{T}_1^{1,0} - \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} \right) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right) \right) \end{aligned}$$

Preuve. Tout d'abord on considère la décomposition suivante

$$\left\| \mathcal{T}_1^\alpha \circ \widehat{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) - \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \left\| \left(\mathcal{T}_1^\alpha - \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \right) \circ \widehat{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.181)$$

$$+ \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \circ \left(\widehat{\mathcal{T}}_2^\alpha - \widetilde{\mathcal{T}}_2^\alpha \right) \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.182)$$

$$+ \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \circ \widetilde{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \left(\mathcal{T}_1^\alpha - \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \right) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.183)$$

Commençons par le terme (2.181). Le terme (2.181) peut se décomposer de la manière suivante :

$$\left\| \left(\mathcal{T}_1^\alpha - \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \right) \circ \widehat{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \left\| \left(\mathcal{T}_1^\alpha - \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \right) \circ \mathcal{T}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.184)$$

$$+ \left\| \mathcal{T}_1^\alpha \circ \left(\widehat{\mathcal{T}}_2^\alpha - \mathcal{T}_2^\alpha \right) \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \quad (2.185)$$

$$+ \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \circ \left(\mathcal{T}_2^\alpha - \widehat{\mathcal{T}}_2^\alpha \right) \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)}. \quad (2.186)$$

Commençons par (2.184).

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{T}_1^\alpha - \tilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \right) \circ \mathcal{T}_2^\alpha \circ \mathcal{T}_1^\alpha f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq C \Delta x^{4-|\alpha|} \left\| \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{\mathcal{C}_b^4(\Omega)} \\ &\leq C \left(\|f\|_{\mathcal{C}_b^4(0,T;\mathcal{C}_b^4(\Omega))}, \|E\|_{\mathcal{C}_b^4(\Omega)} \right) \Delta x^{4-|\alpha|} \\ &\leq C \Delta x^{4-|\alpha|} \end{aligned}$$

Le terme (2.185) a déjà été estimé et le résultat est donné par le lemme 38. Evaluons le terme (2.186). Si on introduit les courbes caractéristiques suivantes

$$\begin{aligned} \tilde{X}^*(t^n) &= x - v\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} E(t^{n+1/2}, x) \\ \tilde{V}^*(t^n) &= v - \Delta t E(t^{n+1/2}, x) \\ \hat{X}^*(t^n) &= x - v\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} E_h^{n+1/2}(x) \\ \hat{V}^*(t^n) &= v - \Delta t E_h^{n+1/2}(x) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} \left| \left(\left(\hat{\mathcal{T}}_2 - \mathcal{T}_2 \right) \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) \right)_{k,l} \right| &\leq \left| f \left(t^n, \hat{X}_{k,l}^*(t^n), \hat{V}_{k,l}^*(t^n) \right) - f \left(t^n, \tilde{X}_{k,l}^*(t^n), \tilde{V}_{k,l}^*(t^n) \right) \right| \\ &\leq C \Delta t \left\| E_h^{n+1/2} - E(t^{n+1/2}) \right\|_\infty \|\nabla f\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\left\| \left(\hat{\mathcal{T}}_2 - \mathcal{T}_2 \right) \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq C |\Omega| \Delta t \left\| E_h^{n+1/2} - E(t^{n+1/2}) \right\|_\infty$$

et en utilisant (2.175) on obtient finalement

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \left(\hat{\mathcal{T}}_2 - \mathcal{T}_2 \right) \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq C |\Omega| \Delta t \left\| E_h^{n+1/2} - E(t^{n+1/2}) \right\|_\infty \\ &\leq C \Delta t \left(\Delta t^2 + \Delta x^4 + \Delta v^4 \right. \\ &\quad \left. + \left\| \left(\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1 \right) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
& \left| \left((\nabla \widehat{\mathcal{T}}_2 - \nabla \mathcal{T}_2) \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n) \right)_{k,l} \right| \\
& \leq \left| \nabla f \left(\widehat{X}_{k,l}^*(t^n), \widehat{V}_{k,l}^*(t^n) \right) \right| \cdot \left(\left| \nabla \widehat{X}_{k,l}^*(t^n) - \nabla \widetilde{X}_{k,l}^*(t^n) \right| + \left| \nabla \widehat{V}_{k,l}^*(t^n) - \nabla \widetilde{V}_{k,l}^*(t^n) \right| \right) \\
& + \left| \nabla f \left(\widehat{X}_{k,l}^*(t^n), \widehat{V}_{k,l}^*(t^n) \right) - \nabla f \left(\widetilde{X}_{k,l}^*(t^n), \widetilde{V}_{k,l}^*(t^n) \right) \right| \cdot \left| \nabla \left(\widetilde{X}_{k,l}^*(t^n), \widetilde{V}_{k,l}^*(t^n) \right) \right| \\
& \leq \left| \nabla f \left(\widehat{X}_{k,l}^*(t^n), \widehat{V}_{k,l}^*(t^n) \right) \right| \cdot \left(\left| \nabla \widehat{X}_{k,l}^*(t^n) - \nabla \widetilde{X}_{k,l}^*(t^n) \right| + \left| \nabla \widehat{V}_{k,l}^*(t^n) - \nabla \widetilde{V}_{k,l}^*(t^n) \right| \right) \\
& + \left(\left| \widehat{X}_{k,l}^*(t^n) - \widetilde{X}_{k,l}^*(t^n) \right| + \left| \widehat{V}_{k,l}^*(t^n) - \widetilde{V}_{k,l}^*(t^n) \right| \right) \\
& \cdot \left| \nabla^2 f \left(\widetilde{X}_{k,l}^*(t^n), \widetilde{V}_{k,l}^*(t^n) \right) \right| \cdot \left| \nabla \left(\widetilde{X}_{k,l}^*(t^n), \widetilde{V}_{k,l}^*(t^n) \right) \right| \\
& \leq C \left(\|\nabla f\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b(\Omega))}, \|\nabla^2 f\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b(\Omega))}, \|\partial_x E\|_{\mathcal{E}_b(0,T;\mathcal{E}_b(\Omega))} \right) \\
& \times \left(\left| \widehat{X}_{k,l}^*(t^n) - \widetilde{X}_{k,l}^*(t^n) \right| + \left| \widehat{V}_{k,l}^*(t^n) - \widetilde{V}_{k,l}^*(t^n) \right| \right) \\
& + \left| \nabla \widehat{X}_{k,l}^*(t^n) - \nabla \widetilde{X}_{k,l}^*(t^n) \right| + \left| \nabla \widehat{V}_{k,l}^*(t^n) - \nabla \widetilde{V}_{k,l}^*(t^n) \right| \\
& \leq C \Delta t \left\| E_h^{n+1/2} - E(t^{n+1/2}) \right\|_{1,\infty}
\end{aligned}$$

A partir des inégalités (2.176), (2.177), (2.179) et (2.180)

$$\begin{aligned}
& \left\| \nabla \widetilde{\mathcal{T}}_1 \left((\nabla \widehat{\mathcal{T}}_2 - \nabla \mathcal{T}_2) \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n) \right) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq (1 + C \Delta t) \left\| (\nabla \widehat{\mathcal{T}}_2 - \nabla \mathcal{T}_2) \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
& \leq C |\Omega| \Delta t \left\| E_h^{n+1/2} - E(t^{n+1/2}) \right\|_{1,\infty} \\
& \leq C \Delta t \left(\Delta t^2 + \Delta x^4 + \Delta v^4 + \left\| (\mathcal{T}_1 - \widetilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \right) \\
& + \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \left\| (\mathcal{T}_1^{1,0} - \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0}) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} + \left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1^{1,0} (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

Continuons avec le terme (2.182). En utilisant (2.175) il vient

$$\begin{aligned}
\left\| \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \left(\widehat{\mathcal{T}}_2 - \widetilde{\mathcal{T}}_2 \right) \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} & \leq \left\| \left(\widehat{\mathcal{T}}_2 - \widetilde{\mathcal{T}}_2 \right) \circ \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
& \leq C \Delta v^4 \left\| \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{\mathcal{E}_b^4(\Omega)} \\
& \leq C \Delta v^4 \|f\|_{\mathcal{E}(0,T;\mathcal{E}_b^4(\Omega))}.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.176) et (2.177) il vient

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla \widetilde{\mathcal{T}}_1 \circ \left(\nabla \widehat{\mathcal{T}}_2 - \nabla \widetilde{\mathcal{T}}_2 \right) \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} & \leq (1 + C \Delta t) \left\| \left(\nabla \widehat{\mathcal{T}}_2 - \nabla \widetilde{\mathcal{T}}_2 \right) \circ \nabla \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
& \leq C \Delta v^3 \left\| \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{\mathcal{E}_b^4(\Omega)} \\
& \leq C \Delta v^3 \|f\|_{\mathcal{E}(0,T;\mathcal{E}_b^4(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Finissons avec le terme (2.183). En utilisant (2.175) et (2.178) il vient

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ (\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ (\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq \left\| (\mathcal{T}_1 - \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq C \Delta x^4 \left\| \mathcal{T}_1 f(t^n) \right\|_{\mathcal{C}_b^4(\Omega)} \\
&\leq C \Delta x^4 \|f\|_{\mathcal{C}(0,T;\mathcal{C}_b^4(\Omega))}.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.176), (2.177), (2.179) et (2.180) il vient

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \nabla \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ (\nabla \mathcal{T}_1 - \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq (1 + C \Delta t) \left\| \nabla \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ (\nabla \mathcal{T}_1 - \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq (1 + C \Delta t)^2 \left\| (\nabla \mathcal{T}_1 - \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1) f(t^n) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq C \Delta x^3 \|f(t^n)\|_{\mathcal{C}_b^4(\Omega)} \\
&\leq C \Delta x^4 \|f\|_{\mathcal{C}(0,T;\mathcal{C}_b^4(\Omega))}.
\end{aligned}$$

■

Maintenant on cherche à évaluer les quantités (I4)

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1^\alpha \circ \tilde{\mathcal{T}}_2^\alpha \circ \tilde{\mathcal{T}}_1^\alpha (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)}.$$

Lemme 42 Soit $f \in \mathcal{C}_b(0, T; \mathcal{C}_b^1(\Omega))$, alors il existe une constante C indépendante de h et Δt telle que

$$\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq \|f(t^n) - f_h(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)}$$

et

$$\left\| \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \nabla \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \leq (1 + C \Delta t) \|\nabla f(t^n) - \nabla f_h(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)}$$

Preuve. En utilisant (2.175) et (2.178) il vient

$$\begin{aligned}
\left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq \left\| \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq \left\| \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq \|f(t^n) - f_h(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

En utilisant (2.176), (2.177), (2.179) et (2.180) il vient

$$\begin{aligned}
\left\| \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1 \circ \nabla \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} &\leq (1 + C \Delta t) \left\| \nabla \tilde{\mathcal{T}}_2 \circ \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq (1 + C \Delta t)^2 \left\| \nabla \tilde{\mathcal{T}}_1 (f(t^n) - f_h(t^n)) \right\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq (1 + C \Delta t)^3 \|\nabla f(t^n) - \nabla f_h(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)} \\
&\leq (1 + C \Delta t) \|\nabla f(t^n) - \nabla f_h(t^n)\|_{L_h^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

■
Preuve du théorème 35. En assemblant les lemmes 36, 38, 40, 41 et 42 on obtient

$$\begin{pmatrix} e_{n+1} \\ \nabla e_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + C\Delta t & \Delta t \Delta x \\ \Delta t (1 + \Delta x^{-1}) & 1 + C\Delta t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_n \\ \nabla e_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma \\ \nabla \gamma \end{pmatrix}$$

où

$$\gamma = C (\Delta t^2 + (1 + \Delta t + \Delta x)(\Delta x^4 + \Delta v^4) + \Delta x^4 + \Delta x^4)$$

et

$$(\nabla \gamma)_1 = (\nabla \gamma)_2 = C (\Delta t^2 + \Delta x^{-1}(1 + \Delta t + \Delta x)(\Delta x^4 + \Delta v^4) + \Delta x^3 + \Delta x^3).$$

Les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 + C\Delta t & \Delta t \Delta x \\ \Delta t (1 + \Delta x^{-1}) & 1 + C\Delta t \end{pmatrix}$$

sont équivalente à $1 + O(\Delta t)$. En déroulant la formule de récurrence on obtient

$$\begin{pmatrix} e_{n+1} \\ \nabla e_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta t} \begin{pmatrix} \gamma \\ \nabla \gamma \end{pmatrix} + e^{CT} \begin{pmatrix} e_0 \\ \nabla e_0 \end{pmatrix}$$

qui est l'estimation d'erreur de $\partial^\alpha f - \partial^\alpha f_h$ énoncée dans le théorème 35, en supposant que $e_0 = \nabla e_0 = 0$. A partir des estimations (2.170) et (2.171) et de l'estimation d'erreur de $\partial^\alpha f - \partial^\alpha f_h$ on trouve l'estimation de $\partial^\alpha E - \partial^\alpha E_h$ énoncée dans le théorème 35. ■

2.6 Conclusions

Dans ce chapitre on a présenté des preuves rigoureuses de la convergence de plusieurs méthodes numériques et des estimations *a priori* sur la vitesse de convergence des suites de solutions construites, vers la solution du problème continu. L'étape la plus délicate est l'obtention d'un résultat de stabilité sur les opérateurs d'interpolation. Si dans le cas des grilles, l'analyse de Fourier et plus précisément les séries de Fourier fournissent un outil pratique pour établir la stabilité L^2 , dans le cas des maillages non structurés et notamment des triangulations, il n'existe pas d'outil mathématique adapté. Afin de continuer l'étude des méthodes semi-Lagrangiennes avec propagation de gradients, et d'établir la stabilité d'opérateurs d'interpolation complexes (faisant intervenir les valeurs de la fonction de distribution et de ses dérivées partielles dans l'espace des phases) agissant sur des triangles une voie de recherche serait la construction d'un outil basé sur la transformée de Fourier continue en supprimant les fréquences que le maillage ne peut reproduire. En outre la généralisation de la convergence des schémas numériques proposés dans ce chapitre au cas multidimensionnel ne semble pas difficile hormis le traitement de la singularité du noyau de Green.

Chapitre 3

Schémas semi-Lagrangien pour l'équation de Vlasov 1D dans l'espace des phases

Sommaire

3.1	Introduction.	128
3.2	L'équation de Vlasov	131
3.3	Principe d'une méthode semi-Lagrangienne	134
3.4	Détermination des courbes caractéristiques	135
3.5	Méthodes d'interpolation.	135
3.6	Les schémas numériques	135
3.6.1	Interpolation de Lagrange	140
3.6.2	Interpolation de type Hermite	143
3.6.3	Discrétisation complète du schéma	152
3.6.4	Schémas conservatifs et positifs	153
3.7	Résultats numériques	157
3.7.1	L'amortissement Landau linéaire	157
3.7.2	L'amortissement Landau non linéaire	158
3.7.3	L'instabilité double faisceaux	161
3.8	Quelques perspectives	164
3.8.1	Méthodes <i>a posteriori</i> pour la conservation des invariants	164
3.8.2	Autres reconstructions	172
3.8.3	Propagation des dérivées d'ordre supérieur	172
3.8.4	Méthodes sans maillage	172

3.1 Introduction.

L'équation de Vlasov décrit l'évolution d'un système de particules sous l'effet de champs de forces électromagnétiques auto-consistants et appliquées. L'inconnue, $f(t, x, v)$, où t désigne le temps, x la position et v la vitesse, représente la fonction de distribution des particules (ions, électrons,...) dans l'espace des phases. L'équation de Vlasov est utilisée pour étudier entre autres les plasmas sans collisions et les faisceaux de particules chargées.

Pour résoudre l'équation de Vlasov on utilise habituellement des méthodes purement Lagrangiennes comme les méthodes particulaires (PIC) où le plasma est approché par un nombre fini de "particules numériques" (la fonction de distribution est approchée par une mesure discrète qui est une somme finie de distributions de Dirac et qui converge faiblement, au sens des distributions, vers la fonction de distribution lorsque le nombre de "particules numériques" tend vers l'infini). Les trajectoires de ces "particules numériques" sont calculées à partir des courbes caractéristiques données par l'équation de Vlasov, alors que les champs auto-consistants sont calculés à partir des équations de Maxwell ou de Poisson dont les seconds membres sont les densités de charge et de courant obtenues en projetant sur un maillage de l'espace physique les poids associés aux "particules numériques". (pour plus de détails voir Birdsall et Langdon [38]). Ces méthodes donnent des résultats relativement satisfaisants pour de nombreuses situations physiques avec un petit nombre de particules. Cependant dans le cas des faisceaux de particules chargées où la description précise des queues de distributions joue un rôle important, le bruit numérique inhérent aux méthodes particulaires est souvent trop important pour donner une description physique satisfaisante des régions où la densité de particules est faible. Généralement le bruit numérique décroît en $1/\sqrt{N}$ où N est le nombre de "particules numériques". Cependant la précision des méthodes PIC peut être améliorée en utilisant des techniques de réduction du bruit qui consistent à moyennner les résultats obtenus à partir de plusieurs exécutions, et ceci avec un coût de calcul raisonnable (cf [134]). Une autre voie sont les méthodes Eulériennes qui consistent à discrétiser directement l'équation de Vlasov sur un maillage de l'espace des phases. Par exemple une méthode d'éléments finis a été proposée dans [216]. Bien que cette méthode prenne en compte des géométries complexes, que l'on rencontre fréquemment dans les situations physiques réelles, ce n'est pas une méthode conservative, mais surtout, elle nécessite la résolution d'un système linéaire global qui la rend pratiquement inutilisable lorsqu'on considère plusieurs dimensions dans l'espace des phases car la résolution du système linéaire qui met en jeu un trop grand nombre d'inconnues est trop longue. Une solution à ce problème serait la parallélisation de la résolution du système linéaire, qui du point de vue technique semble être non triviale. Une autre méthode appelée "Fourier-Fourier transform", basée sur la transformée de Fourier rapide de la fonction de distribution dans l'espace des phases et une technique de splitting pour la discrétisation en temps (cf [94, 48, 121]), fonctionne avec des conditions aux limites périodiques. Lorsque les conditions aux limites ne sont pas périodiques mais que la fonction de distribution décroît rapidement dans l'espace des phases, on peut périodiser la fonction en supposant que la fonc-

tion est approximativement nulle aux bords du domaine. Du fait que la fonction de distribution n'est pas exactement périodique au départ, ce non respect de périodicité s'amplifie au cours du calcul et donne naissance à des oscillations de Gibbs qui deviennent une source d'oscillations parasites qui se propagent dans la fonction de distribution (cf [129, 66, 67, 124, 126]). Une propriété des solutions du système de Vlasov-Poisson est le développement de la filamentation qui se traduit dans l'espace des phases par l'apparition de forts gradients dans la fonction de distribution. Ce phénomène physique qu'est la filamentation est bien connu et peut poser des problèmes dans les simulations numériques. En effet, lorsqu'il n'y a pas de mécanismes physiques de relaxation (comme par exemple l'effet régularisant d'un opérateur de collision) il se développe des structures microscopiques de plus en plus fines qui finissent par disparaître lorsque la fréquence associée à ces phénomènes physiques devient plus grande que celle que la discrétisation est capable de reproduire. Pour pouvoir obtenir des résultats physiques significatifs au niveau macroscopique en temps plus long il faut raffiner de beaucoup le maillage. L'idée serait de limiter la filamentation tout en conservant au niveau macroscopique une physique "convenable". Ce problème de la filamentation a souvent été discuté (cf [105, 106, 130, 48, 124]). Afin de résoudre le problème de la filamentation Klimas, (cf [128]) a introduit une méthode "Fourier-Fourier" régularisée. Cette méthode consiste à convoluer la fonction de distribution originale avec une distribution Gaussienne et à résoudre le nouveau système ainsi formé par un algorithme de splitting en temps et une transformée de Fourier rapide dans l'espace des phases. Cependant le filtrage de l'équation de Vlasov introduit un second terme qui produit une instabilité numérique (du type équation de la chaleur rétrograde) si le nouveau système est discrétisé par une méthode (par exemple une méthode directe comme les différences finies) autre que la transformée de Fourier (cf [83]). D'autres méthodes pseudo-spectrales, appelées "Fourier-Hermite (FH) weighted-residual schemes" (cf [105, 106, 4, 5, 187]) utilisent une technique de splitting en temps, une base de séries de Fourier pour la discrétisation de l'espace physique et une base de polynômes d'Hermite asymétriquement pondérés (AW) pour la discrétisation de l'espace des vitesses. Même si ces méthodes conservent la masse et l'impulsion de manière exacte et l'énergie totale à l'ordre trois en temps ($O(\Delta t^3)$) elles sont instables (elles ne conservent ou ne diminuent pas la norme L^2 de f) et offrent de mauvaises propriétés de résolution dans l'espace des vitesses (cf [94, 189]). Cependant des travaux récents, montrent qu'avec une sélection convenable de l'échelle de résolution dans l'espace des vitesses obtenue en introduisant un paramètre d'échelle en vitesse dans une base de polynômes d'Hermite symétriquement pondérés (SW) ce type de méthodes donne des résultats compétitifs, surtout lorsque les fonctions de distribution ont un profil Maxwellien en vitesse (cf [189, 42, 199, 115]). Une autre méthode FBM (Flux Balance Method, [147], [84]) est basée sur le calcul de la moyenne de la solution de l'équation de Vlasov par un schéma conservatif (de type volumes finis) sur chaque cellule de la grille discrétisant l'espace des phases. Les techniques utilisées pour reconstruire la fonction de distribution ne préservent pas la positivité, ce qui peut être un inconvénient pour les simulations en temps long. La méthode PPM (Piecewise Parabolic Method, [55]) et le schéma de Van-Leer (VL) utilisent

des limiteurs pour la reconstruction géométrique (limiteurs de pente pour VL) pour maintenir la monotonie et la positivité alors que la méthode FCT (Flux Corrected Transport, [40]) utilise des limiteurs de Flux pour obtenir les mêmes propriétés. La reconstruction est linéaire pour VL et parabolique pour PPM. Une reconstruction géométrique similaire d'ordre trois qui conduit à un schéma positif et non monotone caractérise la méthode PFC (Positive Flux Conservative Method, cf [87]). Ces méthodes sont d'ordre un et dissipative dans les régions où le limiteur de pente agit (à proximité des extrema) et formellement d'ordre élevé ailleurs (régions où la fonction est "régulière", ou "lisse"). Dans la même veine de méthodes, Mangeney et al. [145] utilisent un *splitting* pour la discrétisation en temps et différents types de reconstructions (méthodes de Galerkin discontinues, interpolation d'Hermite en une dimension, interpolation Spline, schémas de Van-Leer d'ordre deux et trois). Des comparaisons de plusieurs méthodes Euleriennes sur une grille de l'espace des phases peuvent être trouvées dans [6, 145, 88]. Ces méthodes de "volumes finis semi-Lagrangiennes", où maintenant on ne transporte plus des segments comme cela était le cas dans les méthodes précédentes mais des volumes à deux dimensions qui sont des carrés, ont été implémentées par Phillips et Williams [163, 164, 190]. Cependant ces méthodes ne sont pas encore très au point et sont très complexes car il faut déterminer les multiples configurations que peut prendre le volume élémentaire qui se déforme lors du transport et en calculer l'intersection avec la grille de départ. D'autre part pour éviter que les volumes ne se déforment trop ou ne prennent des configurations "illicites", une restriction sur le pas de temps doit être imposée. L'interpolation, qui est d'ordre faible (linéaire), s'effectue par une technique de pondération par les aires. D'autres types de méthodes comme les méthodes de Lagrange-Galerkin, et caractéristiques-Galerkin (appelées parfois "Particle-In-Cell finite element method") ont été traitées par de nombreux auteurs pour résoudre les systèmes hyperboliques de lois de conservation et les équations de convection-diffusion. Bien qu'elles n'aient pas été utilisées pour résoudre l'équation de Vlasov, elles représentent peut être une alternative intéressante car dans certains cas elles sont équivalentes à des méthodes semi-Lagrangiennes (cf [29, 30]). D'autres méthodes Euleriennes comme les méthodes semi-Lagrangiennes ([193]) consistent à calculer directement la fonction de distribution sur une grille de l'espace des phases. Pour cela on intègre les équations des caractéristiques en arrière à chaque pas de temps et on interpole la valeur de la fonction de distribution à l'extrémité initiale de la caractéristique par une méthode de spline cubique ou d'interpolation de Lagrange. Nakamura et Yabe ont proposé la méthode CIP (Cubic Interpolated Propagation, [151]) basée sur une technique de *splitting* pour la discrétisation en temps, et une méthode semi-Lagrangienne pour la discrétisation de l'opérateur de transport. La reconstruction de la fonction de distribution se fait par une méthode d'interpolation d'Hermite à une dimension où les gradients sont approchés par une méthode de différences finies. Ces méthodes sont d'ordre élevé et préservent la masse globale (lorsque le maillage est une grille uniforme) mais elles ne sont pas positives ni monotones. Les méthodes CIP (Constrained Interpolation Profile method) ont été modifiées, notamment en considérant une formulation de type volumes finis, afin d'obtenir des schémas conservatifs et positifs au détri-

ment d'un ordre élevé de résolution (cf [152, 198, 212, 213]). A notre connaissance il n'existe à ce jour aucune méthode de type semi-lagrangien sur des maillages non structurés de l'espace des phases.

Dans ce chapitre on propose de nouvelles méthodes numériques pour la discrétisation du système de Vlasov-Poisson basées sur un principe semi-Lagrangien et une technique de splitting en temps sur des maillages non structurés de l'espace des phases. Cette méthode utilise différents opérateurs locaux d'interpolation d'ordre élevé qui nécessitent non seulement la connaissance de f mais aussi de ses gradients dans l'espace des phases obtenus par propagation. De plus, on utilise les idées développées dans les codes numériques de prédictions météorologiques ([173] et [197]) pour obtenir une méthode positive et conservative en introduisant une combinaison linéaire d'une solution d'ordre faible (linéaire) et d'ordre élevé. Dans un premier temps on rappelle l'équation de Vlasov et quelques propriétés de la solution. Ensuite on présentera la méthode numérique que l'on illustrera par quelques cas test issus de la physique des plasmas. Enfin on évoquera quelques perspectives.

3.2 L'équation de Vlasov

L'évolution de la fonction de distribution des particules $f(t, x, v)$ dans l'espace des phases $(x, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, $d = 1, \dots, 3$, est donnée par l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f + (F_{\text{auto}}(t, x, v) + F_{\text{appl}}(t, x, v)) \cdot \nabla_v f = 0, \quad (3.1)$$

où $F_{\text{appl}}(t, x, v)$ représente le champ de force appliqué et où le champ de force auto-consistant $F_{\text{auto}}(t, x, v)$ est couplé avec la fonction de distribution f conduisant ainsi à un système non linéaire. On rappelle deux modèles bien connus dans la physique des plasmas sans collisions, le modèle de Vlasov-Poisson (VP) et de Vlasov-Maxwell (VM) qui décrivent l'évolution de particules chargées sous l'effet d'un champ électromagnétique auto-consistant.

Le couplage entre f et le champ de force est donné par les termes sources ρ , la densité de charge, et j , la densité de courant qui ne sont rien d'autres que les deux premiers moments en v de f :

$$\rho(t, x) = q \int_{\mathbb{R}^d} f(t, x, v) dv, \quad j(t, x) = q \int_{\mathbb{R}^d} v f(t, x, v) dv.$$

Pour le système (VP) le champ de force auto-consistant est donné par

$$F_{\text{auto}}(t, x, v) = \frac{q}{m} E(t, x), \quad E(t, x) = -\nabla_x \phi(t, x), \quad -\varepsilon_0 \Delta \phi(t, x) = \rho(t, x)$$

où q et m sont respectivement la charge et la masse d'une particule.

Pour le système (VM) le champ de force auto-consistant est donné par la force de Lorentz

$$F_{\text{auto}}(t, x, v) = \frac{q}{m} (E(t, x) + v \wedge B(t, x)),$$

où E et B sont solutions des équations de Maxwell.

$$\begin{cases} \frac{\partial E}{\partial t} - c^2 \operatorname{rot} B = -\frac{1}{\varepsilon_0} j, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \operatorname{rot} E = 0, \\ \operatorname{div}_x E = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho, \quad \operatorname{div}_x B = 0. \end{cases}$$

avec la condition de compatibilité (équation de conservation de la charge)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}_x j = 0,$$

qui est vérifiée en intégrant l'équation de Vlasov par rapport à la variable v . Maintenant on rappelle quelques estimations *a priori* pour les systèmes (VP) et (VM). Si $f_0(x, v)$ est positive alors $f(t, x, v)$ reste positive pour tout temps $t \geq 0$. En observant que $\operatorname{div}_v F_{\text{auto}}(t, x, v) = 0$, si f est assez régulière, alors pour toute fonction $\beta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \beta(f(t, x, v)) dx dv$$

est constant pour tout $t \geq 0$. En particulier toutes les normes L^p , $1 \leq p \leq \infty$, sont conservées. De plus si $\beta(r) = r \ln r$, on obtient la conservation de l'entropie cinétique définie par

$$H(t) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) \ln f(t, x, v) dx dv, \quad \forall t > 0.$$

De plus, si on multiplie l'équation de Vlasov par $|v|^2$, et si on intègre par partie on trouve la conservation de l'énergie totale qui est donnée par

$$\frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) |v|^2 dx dv + \frac{\varepsilon_0}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |E(t, x)|^2 dx, \quad \forall t > 0,$$

pour le système (VP) et

$$\frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) |v|^2 dx dv + \varepsilon_0 \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|E(t, x)|^2 + c^2 |B(t, x)|^2}{2} dx, \quad \forall t > 0, \quad \varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1,$$

pour le système (VM). Finalement la masse et l'impulsion

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(t, x, v) \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} dv dx$$

sont conservées.

Si $a(t, x, v) = (v, F(t, x, v))^T$ avec $F = F_{\text{auto}} + F_{\text{appl}}$ est suffisamment régulier (Lipschitzienne continue dans L^∞), alors on peut définir de manière unique les

courbes caractéristiques $(X(t; s, x, v), V(t; s, x, v))$ de l'opérateur différentiel du premier ordre,

$$\frac{\partial}{\partial t} + a \cdot \nabla,$$

qui vérifient le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t; s, x, v) = V(t; s, x, v), \\ \frac{dV}{dt}(t; s, x, v) = F(t, X(t; s, x, v), V(t; s, x, v)), \\ X(s; s, x, v) = x, \quad V(s; s, x, v) = v, \end{cases} \quad (3.2)$$

où $(X(t; s, x, v), V(t; s, x, v))$ désigne la position dans l'espace des phases au temps t , de la particule qui était en (x, v) au temps s .

L'équation de Vlasov peut se réécrire sous forme conservative

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div}_{(x,v)}(af) = 0, \quad \forall (t, x, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad (3.3)$$

avec la condition initiale

$$f(0, x, v) = f_0(x, v). \quad (3.4)$$

Dans [41] il est prouvé que le jacobien $J(t; s, x, v) = \det(\partial_{(x,v)}(X(t; s, x, v), V(t; s, x, v)))$ reste positif, borné et vérifie l'équation

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J(\operatorname{div}_{(x,v)}a)(t, X(t; s, x, v), V(t; s, x, v)).$$

Il est aussi démontré que la solution de (3.3) est donnée par

$$f(t, x, v) = f(s, X(s; t, x, v), V(s; t, x, v))J(s; t, x, v). \quad (3.5)$$

Dans le cas de l'équation de Vlasov, puisque $\operatorname{div}_{(x,v)}a = 0$, on obtient $J = 1$, et le flot $\varphi_t(x, v) = (X(t; s, \cdot, \cdot), V(t; s, \cdot, \cdot))$ préserve la mesure du volume de l'espace des phases si bien que l'équation (3.5) devient

$$f(t, x, v) = f(s, X(s; t, x, v), V(s; t, x, v)).$$

Cette dernière équation signifie que la fonction de distribution f est constante le long des courbes caractéristiques, ce qui constitue le point de départ de notre méthode numérique. Une bonne introduction au problème de Cauchy en théorie des équations cinétiques peut être trouvée dans [95]. En particulier il est montré que si f_0 est régulière et à support compact alors la solution du système de Vlasov-Poisson reste régulière et à support compact pour tout temps fini.

Finalement on remarque que la structure du système de Vlasov-Poisson en six dimensions est très proche des équations d'Euler incompressibles en deux dimensions lorsqu'elles sont écrites en formulation vorticité. Si on introduit la fonction courant

$$\psi(t, x, v) = \frac{m|v|^2}{2} + \frac{\phi}{2}(t, x),$$

qui est l'Hamiltonien du système, et la notation $\nabla_{(x,v,\eta)} = (\nabla_x, \nabla_v, \nabla_\eta)$ où $\vec{\eta}$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 , alors on peut faire le parallèle suivant

$$\begin{array}{l}
 \partial_t \omega + \nabla \cdot (\omega u) = 0 \\
 \omega(0, x) = \omega_0(x) \\
 \nabla \times u = \omega \quad (\text{EI1}) \\
 \nabla \cdot u = 0 \\
 u = \nabla \times (\Psi \vec{z}) \quad (\text{EI2}) \\
 (\text{EI1}) \ \& \ (\text{EI2}) \Rightarrow -\Delta \Psi = \omega
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 \partial_t f + \nabla \cdot (fa) = 0 \\
 f(0, x, v) = f_0(x, v) \\
 \nabla \cdot E = \rho = \int f dv \quad (\text{VP1}) \\
 \nabla_{(x,v)} \cdot a = 0 \\
 a = \nabla_{(x,v,\eta)} \times (\psi \vec{\eta}) \quad (\text{VP2}) \\
 (\text{VP1}) \ \& \ (\text{VP2}) \Rightarrow -\Delta_x \psi = \Delta \phi = \rho = \int f dv
 \end{array}
 \right.$$

Cela signifie que le système de Vlasov est intrinsèquement turbulent, d'où l'apparition d'une gamme d'échelles très variées de phénomènes physiques. Si l'équation de Vlasov est une équation hyperbolique non linéaire, elle ne génère pas des chocs comme dans le cas de la mécanique des gaz car la régularité est conservée au cours du temps. Cependant l'équation de Vlasov met en jeu à la fois des échelles microscopiques et macroscopiques qui posent un problème du point de vue de la simulation numérique car il est difficile d'avoir des schémas de discrétisation qui tiennent compte de toutes les échelles.

3.3 Principe d'une méthode semi-Lagrangienne

L'équation de Vlasov, qui est une équation hyperbolique dont le flux est à divergence nulle traduit la conservation du nombre de particules contenues dans un élément de volume pendant son mouvement, ou autrement dit la mesure de la fonction de distribution se conserve au cours du temps ainsi que la mesure du volume de l'espace des phases ou encore la valeur de la fonction de distribution reste constante le long des caractéristiques associées aux particules.

Cette dernière propriété qui est utilisée dans une méthode semi-lagrangienne peut se résumer ainsi : Considérons un maillage quelconque recouvrant le domaine des phases sur lequel on cherche à simuler l'équation de Vlasov. A un instant t on considère l'ensemble des caractéristiques qui passent par les points du maillage. Pour déterminer la valeur de la fonction de distribution en un point du maillage on remonte, jusqu' à l'instant $t - \Delta t$ la caractéristique qui passe par ce point à l'instant t . Comme la fonction de distribution f est constante le long de la courbe caractéristique, il suffit alors de savoir calculer la valeur de la fonction de distribution au temps $t - \Delta t$ au pied de la caractéristique. Comme ce dernier point ne coïncide généralement pas avec un point du maillage, on est contraint d'utiliser une méthode d'interpolation pour évaluer la valeur de f en ce point. On perçoit de suite que la qualité de la méthode semi-lagrangienne repose sur une bonne approximation des courbes caractéristiques et une méthode d'interpolation ayant de bonnes propriétés de stabilité que l'on définira par la suite.

3.4 Détermination des courbes caractéristiques

Il y a deux façons d'intégrer les équations des caractéristiques. La première, le *splitting*, exploite le fait que les composantes du flux sont aussi à divergence nulle. C'est par exemple le cas pour le système de Vlasov-Poisson ou le système de Vlasov-Maxwell. Cependant il existe aussi des systèmes pour lesquels cette propriété n'est pas vérifiée. C'est le cas par exemple de certains modèles gyrocinétiques. Avec cette méthode on est amené à résoudre plusieurs problèmes de transport de dimension inférieure au problème initial, et pour lesquels on sait intégrer exactement les courbes caractéristiques. L'ordre d'approximation en temps provient alors de la manière dont on opère le *splitting*. La seconde manière est de résoudre le système d'équations différentielles ordinaires formé par les équations des trajectoires des particules, par une méthode d'intégration numérique classique (Euler, Runge-Kutta, ...). Cependant cette méthode présente, du fait que l'on remonte les courbes caractéristiques dans le temps, le désavantage de conduire à la résolution de points fixes, qui sur le plan numérique peut se révéler coûteux et poser des problèmes de convergence.

Dans notre cas nous nous intéressons au système de Vlasov-Poisson. Aussi on a choisi d'utiliser une technique de *splitting*. On cherchera à résoudre tantôt un problème d'advection dans l'espace physique, tantôt un problème d'advection dans l'espace des vitesses.

3.5 Méthodes d'interpolation.

Sur un domaine maillé en triangles, il n'y a pas un grand choix de méthodes d'interpolation contrairement à ce que l'on peut mettre en oeuvre sur un maillage cartésien. Cela tient au fait que sur une grille, l'interpolation se résume à un produit tensoriel d'une méthode d'interpolation à une dimension qui est abondamment traitée dans la littérature (Lagrange, Hermite, Spline cubique, B-splines, NURBS, ...). Dans le cas d'un maillage non structuré on est plus limité quant aux choix des opérateurs d'interpolation. En effet la structure tensorielle de l'interpolation sur des grilles rend l'implémentation simple et peu coûteuse. Sur des maillage non structurés la perte de la structure tensorielle du maillage et donc de l'interpolation se traduit par un accroissement de complexité qui peut rendre l'implémentation lourde et coûteuse. Ici on examinera deux familles d'interpolation : l'interpolation de Lagrange et l'interpolation de type Hermite.

3.6 Les schémas numériques

Dans cette section on présente un schéma numérique qui n'est pas restreint par une condition de type CFL (Courant-Friedrichs-Levy), contrairement à la plupart des méthodes Euleriennes comme les différences finies ou les volumes finis. Les systèmes de Vlasov-Poisson et Vlasov-Maxwell sont des systèmes mélangeants dont les solutions peuvent devenir extrêmement complexes. En effet, la fonction de distribution reste constante le long des caractéristiques qui deviennent

de plus en plus intriquées. Des régions de l'espace des phases où f a des valeurs très différentes finissent par se rapprocher l'une de l'autre et donnent naissance à de forts gradients. Le développement de la filamentation pose un problème numérique car lorsque la taille des filaments devient plus petite que celle des mailles alors on perd de l'information au niveau microscopique, ce qui peut avoir des conséquences désastreuses au niveau macroscopique car il y a *a priori* des interactions entre les différentes échelles.

Un maillage non structuré de l'espace des phases peut présenter certains avantages. Un maillage non structuré de l'espace des phases permet de considérer des domaines de calculs aux géométries complexes qui surviennent par exemple dans la simulation de la propagation des faisceaux de particules chargées dans des accélérateurs. De plus avec un maillage non structuré on ne privilégie aucune direction, ce qui pourrait introduire un biais dans les résultats physiques. Bien sûr dans ce chapitre on utilisera la méthode des pas fractionnaires qui donne plus d'importance aux directions parallèles aux axes, mais les courbes caractéristiques peuvent aussi être résolues en utilisant des méthodes numériques classiques pour intégrer un système d'équations différentielles ordinaires comme les schémas d'Euler ou Runge-Kutta à titre d'exemples. Dans ce cas il n'y a plus de directions privilégiées. Puisque pour ces méthodes l'intégration s'effectue en arrière elles conduisent à un problème de point fixe pour lesquels des problèmes de convergence numérique peuvent survenir. Dans certains problèmes, les phénomènes physiques restent confinés dans un certain volume de l'espace des phases dont les frontières peuvent être plus ou moins complexes. Un maillage non structuré de l'espace des phases permet de calculer la solution seulement sur la partie utile de l'espace des phases. Par exemple on sait qu'un faisceau K-V est contenu dans un hyper-ellipsoïde. De plus un maillage non structuré comme une triangulation se prête bien au raffinement local *a priori*. En effet, dans certains problèmes physiques, durant la durée entière de la simulation on connaît *a priori* les régions où la solution a besoin d'être précise. Afin d'obtenir une meilleure description de la physique, on peut construire des maillages localement raffinés dans ces régions et mettre l'effort de calcul seulement sur les zones importantes. Pour certains schémas opérant sur des grilles, comme la méthode PFC, si on veut avoir une meilleure résolution dans une région localisée on est obligé de rajouter des points de discrétisation inutiles le long de l'axe. Finalement les méthodes de raffinement adaptatif de maillages semble être une bonne stratégie de calcul parce qu'elles permettent de suivre le développement des structures microscopiques et par conséquent de donner une bonne description des structures cohérentes et organisées qui émergent au niveau macroscopique. Ce type de méthodes permet d'accroître le rapport entre la précision et le temps de calcul puisque on utilise peu de points là où la solution est très régulière et un plus grand nombre de points là où la solution développe de forts gradients. Ceci sera l'objet du chapitre 6.

En terme de flot lagrangien la solution de l'équation de Vlasov peut s'écrire

formellement comme

$$f(t, x, v) = f_0(\varphi_t^{-1}(x, v)), \quad \varphi_t \cdot \varphi_t^{-1} = \text{Identité.} \quad (3.6)$$

où le flot Hamiltonien réversible φ_t dans l'espace des phases est solution des équations (3.2).

Du point de vue Eulerien la relation (3.6) implique l'existence d'un opérateur d'évolution \mathcal{S} (ayant les propriétés d'un semi-groupe) agissant sur une fonction suffisamment régulière tel que

$$f(t, x, v) = \mathcal{S}(t)f_0(x, v) = f_0(\varphi_t^{-1}(x, v)). \quad (3.7)$$

La discrétisation en temps repose sur un schéma de splitting qui consiste à approcher l'opérateur d'évolution \mathcal{S} .

L'équation de Vlasov peut se récrire comme

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mathcal{L}f, \quad (3.8)$$

où l'opérateur \mathcal{L} est défini comme il suit

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_x + \mathcal{L}_v,$$

avec

$$\mathcal{L}_x = -v \cdot \nabla_x, \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_v = -F \cdot \nabla_v.$$

Si on intègre formellement l'équation (3.8) on trouve

$$f(t) = \exp(\mathcal{L}t)f_0.$$

Alors l'opérateur d'évolution \mathcal{S} devient

$$\mathcal{S}(t) = \exp(\mathcal{L}t).$$

Par conséquent un schéma de splitting consiste à trouver une approximation de $\exp(\mathcal{L}t)$. Le splitting de Strang est l'approximation du second ordre

$$\exp(\mathcal{L}\Delta t) = \mathcal{S}_x(\Delta t/2) \circ \mathcal{S}_v(\Delta t) \circ \mathcal{S}_x(\Delta t/2) + O(\Delta t^2)$$

où

$$\mathcal{S}_x(\Delta t) = \exp(\mathcal{L}_x \Delta t), \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_v(\Delta t) = \exp(\mathcal{L}_v \Delta t),$$

ou

$$\mathcal{S}_x(\Delta t)f(x, v) = f(x - v\Delta t, v), \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_v(\Delta t)f(x, v) = f(x, v - F(x)\Delta t).$$

On peut obtenir une approximation d'ordre N en temps en considérant un splitting de la forme

$$\exp(\mathcal{L}\Delta t) = \mathcal{S}_x(\alpha_1 \Delta t) \circ \mathcal{S}_v(\beta_1 \Delta t) \circ \dots \circ \mathcal{T}_x^{\alpha_i}(\Delta t) \circ \mathcal{T}_v^{\beta_i}(\Delta t) \circ \dots \circ \mathcal{S}_x(\alpha_k \Delta t) \circ \mathcal{S}_v(\beta_k \Delta t) + O(\Delta t^N)$$

où les coefficients $\{\alpha_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ et $\{\beta_i\}_{i \in \{1, \dots, k\}}$ doivent être judicieusement choisis (cf [215, 90, 102]).

En d'autres termes, le splitting de Strang consiste à résoudre successivement une demi advection dans l'espace physique, une advection entière dans l'espace des vitesses et finalement une autre demi advection dans l'espace physique. Selon l'opérateur d'interpolation considéré, on advecte non seulement la fonction de distribution f mais aussi ses gradients, parce qu'on a besoin de reconstruire f partout. Les équations pour renouveler les gradients sont obtenues en différenciant la solution de l'équation de transport. Autrement dit les gradients sont solutions d'une équation de transport, obtenue en différenciant l'équation de Vlasov, que l'on résout de nouveau par une méthode de splitting. Les équations

$$\begin{cases} \partial_t(\nabla_x f) + (v \cdot \nabla_x) \nabla_x f + \nabla_x E \nabla_v f + (E \cdot \nabla_v) \nabla_x f = 0 \\ \partial_t(\nabla_v f) + \nabla_v v \nabla_x f + (v \cdot \nabla_x) \nabla_v f + (E \cdot \nabla_v) \nabla_v f = 0 \end{cases}$$

sont remplacées par

$$(P_x) \begin{cases} \partial_t(\nabla_v f) + (v \cdot \nabla_x) \nabla_v f = 0 & (P_x^1) \\ \partial_t(\nabla_x f) + (v \cdot \nabla_x) \nabla_x f = 0 & (P_x^2) \\ \partial_t(\nabla_v f) = -\nabla_v v \nabla_x f & (P_x^3) \end{cases}$$

et

$$(P_v) \begin{cases} \partial_t(\nabla_x f) + (E \cdot \nabla_v) \nabla_x f = 0 & (P_v^1) \\ \partial_t(\nabla_v f) + (E \cdot \nabla_v) \nabla_v f = 0 & (P_v^2) \\ \partial_t(\nabla_x f) = -\nabla_x E \nabla_v f & (P_v^3). \end{cases}$$

D'abord on résout le système P_x sur un demi pas de temps, ensuite on résout le système P_v sur un pas de temps, et finalement on résout de nouveau P_x sur un demi pas de temps. Les équations d'advection, (P_x^1) , (P_v^1) , (P_x^2) , (P_v^2) , peuvent être intégrées exactement en temps. Pour les équations (P_x^3) et (P_v^3) , on utilise un schéma explicite d'Euler en temps. Les conditions initiales pour chaque système sont données par la solution du système précédent. Cette méthode revient exactement à prendre le gradient de la fonction transportée selon l'algorithme de splitting, c'est ce que nous verrons dans la description de l'algorithme qui suit. L'analyse de convergence d'une telle méthode semi-Lagrangienne avec propagation de gradients pour le système non linéaire de Vlasov-Poisson est traitée dans le chapitre 2 et dans [34]. On décrit d'abord l'algorithme qui donne la semi-discrétisation en temps du schéma numérique permettant de passer de t^n à t^{n+1} .

1. Première demi advection dans l'espace physique :

$$\begin{aligned} f^*(x, v) &= f(t^n, x - v\Delta t/2, v), \\ \nabla_x f^*(x, v) &= \nabla_x (f(t^n, x - v\Delta t/2, v)), \\ &= \nabla_x f(t^n, x - v\Delta t/2, v), \\ \nabla_v f^*(x, v) &= \nabla_v (f(t^n, x - v\Delta t/2, v)), \\ &= -\frac{\Delta t}{2} \nabla_x f(t^n, x - v\Delta t/2, v) + \nabla_v f(t^n, x - v\Delta t/2, v). \end{aligned}$$

2. Calcul du champ électrique $E^*(x)$ en substituant f^* dans l'équation de Poisson ; c'est-à-dire résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} E^*(x) &= -\nabla_x \phi^*(x) \\ -\Delta \phi^*(x) &= \rho^*(x) \\ \rho^*(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f^*(x, v) dv, \end{cases}$$

3. Advection entière dans l'espace des vitesses :

$$\begin{aligned} f^{**}(x, v) &= f^*(x, v - E^*(x)\Delta t), \\ \nabla_x f^{**}(x, v) &= \nabla_x (f^*(x, v - E^*(x)\Delta t)), \\ &= \nabla_x f^*(x, v - E^*(x)\Delta t) - \Delta t \nabla E^*(x) \nabla_v f^*(x, v - E^*(x)\Delta t), \\ \nabla_v f^{**}(x, v) &= \nabla_v (f^*(x, v - E^*(x)\Delta t)), \\ &= \nabla_v f^*(x, v - E^*(x)\Delta t) \end{aligned}$$

4. Seconde demi advection dans l'espace physique :

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, x, v) &= f^{**}(x - v\Delta t/2, v), \\ \nabla_x f(t^{n+1}, x, v) &= \nabla_x (f^{**}(x - v\Delta t/2, v)), \\ &= \nabla_x f^{**}(x - v\Delta t/2, v), \\ \nabla_v f(t^{n+1}, x, v) &= \nabla_v (f^{**}(x - v\Delta t/2, v)), \\ &= -\frac{\Delta t}{2} \nabla_x f^{**}(x - v\Delta t/2, v) + \nabla_v f^{**}(x - v\Delta t/2, v) \end{aligned}$$

A chaque étape d'advection, une fois que l'on a suivi les caractéristiques en arrière on doit évaluer la fonction de distribution f et ses gradients à l'extrémité initiale des caractéristiques qui ne coïncide généralement pas avec un point du maillage. Alors on reconstruit f par une technique d'interpolation locale. On présentera différents opérateurs d'interpolation locale pour reconstruire f . Certains d'entre eux nécessitent seulement la connaissance de f aux noeuds du maillage, et d'autres nécessitent aussi ∇f .

Notons qu'à l'étape 3 de l'algorithme on doit connaître le gradient du champ électrique qui est une matrice 2×2 en dimension deux et une matrice 3×3 en dimension trois. Dans les cas test numériques considérés on n'aura pas besoin de calculer directement le gradient du champ électrique ou le gradient du champ de force appliqué aux particules, parce qu'on peut les déduire à partir d'autres quantités physiques. Cependant, dans le cas général on doit calculer le gradient du champ de force appliqué aux particules. Dans le contexte du couplage de l'équation de Vlasov avec l'équation de Poisson, comme cette dernière est linéaire on obtient le gradient du champ électrique en différenciant le système

de Poisson,

$$\begin{cases} \nabla_x E^*(x) & = -\nabla_x (\nabla_x \phi^*(x)) \\ -\Delta (\nabla_x \phi^*(x)) & = \nabla_x \rho^*(x) \\ \nabla_x \rho^*(x) & = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla_x f^*(x, v) dv, \end{cases}$$

qui peut être résolu par exemple, par une méthode d'éléments finis.

Soit Ω un domaine compact de $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v$ où on veut calculer la solution et \mathcal{T}_h une triangulation de Ω . Un élément de T , de la triangulation est un triangle de \mathbb{R}^2 défini par ses trois sommets $\{a_i\}_{i=1,\dots,3}$. Chaque point P de \mathbb{R}^2 est caractérisé par ses coordonnées cartésiennes (x, v) et ses coordonnées barycentriques, $\lambda_j = \lambda_j(x, v)$, $1 \leq j \leq 3$, qui sont liées par les équations

$$\forall P \in T \quad P = \sum_{j=1}^3 \lambda_j(x, v) a_j.$$

Dans un premier temps on présente l'interpolation de Lagrange, pour laquelle on n'a pas besoin de propager les gradients de f . Cependant on verra plus loin que ce type de reconstruction conduit à des problèmes de stabilité. Aussi, on présentera des techniques d'interpolation locale qui impliquent la propagation de f et de ∇f , et qui sont des reconstructions plus stables. La plupart de ces techniques d'interpolation sont issues de la littérature des éléments finis ([110], [25], [155]).

3.6.1 Interpolation de Lagrange

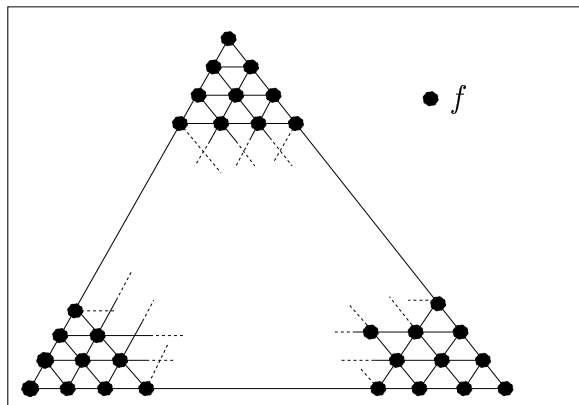


FIG. 3.1 – Élément de Lagrange de degré quelconque

Afin de définir l'interpolation de Lagrange d'ordre k sur un triangle T , on a besoin de définir un treillis principal d'ordre k qui est l'ensemble des points de

\mathbb{R}^2 déterminés par

$$L_k(T) = \left\{ (x, v) \in \mathbb{R}^2; \lambda_j(x, v) \in \left\{ 0, \frac{1}{k}, \dots, \frac{k-1}{k}, 1 \right\}, 1 \leq j \leq 3 \right\}$$

où les coordonnées barycentriques sont définies par rapport aux noeuds $\{a_i\}_{i=1,\dots,3}$. Chaque point du treillis principal $L_k(T)$ peut s'écrire

$$a_\mu = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^3 \mu_j a_j, \quad \mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$$

où les coefficients μ_j sont des entiers qui vérifient les relations

$$\mu_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^3 \mu_j = k.$$

On associe $L_k(T)$ avec l'ensemble des degrés de liberté $\Sigma_k(T)$ définis par,

$$\Sigma_k(T) = \{f(a_\mu), a_\mu \in L_k(T)\},$$

et avec l'espace des polynômes de Lagrange d'ordre k , $P_k(T)$, dont la dimension est $\frac{(2+k)!}{2!k!}$, qui est identique au cardinal de $L_k(T)$. $P_k(T)$ est défini par ses fonctions de bases φ_μ comme il suit. On associe à chaque noeud a_μ de $L_k(T)$ la fonction de base φ_μ définie par

$$\varphi_\mu(x, v) = \left(\prod_{j=1}^3 (\mu_j!) \right)^{-1} \prod_{\substack{j=1 \\ \mu_j \geq 1}}^3 \prod_{i=0}^{\mu_j-1} (k\lambda_j(x, v) - i). \quad (3.9)$$

Le triplet $(T, P_k(T), \Sigma_k(T))$ est appelé un élément fini de Lagrange. Alors on introduit l'opérateur d'interpolation locale Π_T défini par

$$(\Pi_T f)(x, v) = \sum_{\mu=1}^{N_k} f(a_\mu) \varphi_\mu(x, v) \quad \forall f \in \mathcal{C}^0(\bar{T}) \quad (3.10)$$

avec $N_k = \frac{(2+k)!}{2!k!}$ et φ_μ est définie par (3.9). Maintenant on introduit l'espace X_h , qui sera l'espace de discrétisation de la solution :

$$X_h = \{f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega); f|_{T_j} \in P_k(T_j) \forall T_j \in \mathcal{T}_h\}.$$

L'espace X_h est caractérisé par ses fonctions de bases $\{\psi_k\}$, qui vérifient la propriété $\psi_k(x_i, v_i) = \delta_{i,k}$, où (x_i, v_i) est le i ème point de la triangulation \mathcal{T}_h . Alors toute fonction $f \in X_h$ est donnée par

$$f(x, v) = \sum_k f(x_k, v_k) \psi_k(x, v).$$

Finalement on définit l'opérateur d'interpolation globale Π_h par

$$(\Pi_h f)(x, v) = \sum_{k=1}^N f_k \psi_k(x, v) \quad \forall f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$$

où $f_k = f(x_k, v_k)$ et N est le nombre de degré de liberté.

La relation entre l'opérateur d'interpolation globale Π_h et l'opérateur d'interpolation locale Π_T est donnée par

$$(\Pi_h v)|_T = \Pi_T(v|_T), \quad \forall T \in \mathcal{T}_h, \quad v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \quad (3.11)$$

où $v|_T$ désigne la restriction de v à T .

En fait l'interpolation de Lagrange de degré élevé sur des triangles ne fournit pas une bonne reconstruction pour la fonction de distribution, parce que l'opérateur d'interpolation de Lagrange n'a pas de bonnes propriétés de stabilité. Si on prend un élément fini en une dimension (un intervalle borné) il est bien connu que l'interpolant de Lagrange oscille beaucoup aux extrémités de l'élément, même si la fonction à interpoler est très régulière. De plus l'amplitude des oscillations augmente avec le degré du polynôme de Lagrange. Cette observation est connue sous le nom de phénomène de Runge. Par exemple Runge a considéré la distribution de Cauchy

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

sur l'intervalle $[-5, 5]$, avec des points équirépartis

$$x_j = -5 + j\Delta x, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n, \quad \Delta x = \frac{10}{n}.$$

Pour chaque n il existe un unique polynôme $P_n(x)$ de degré au plus égal à n tel que $P_n(x_j) = f(x_j)$. C'est le polynôme d'interpolation de Lagrange. Dans [120] il est prouvé que $|f(x) - P_n(x)|$ devient arbitrairement grand sur $[-5, 5]$ si n est suffisamment grand. De plus ceci a lieu même si les points d'interpolation $\{x_j\}$ deviennent dense dans $[-5, 5]$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Cela implique que le rapport de $\|P_n\|_{L^\infty}$ sur $\|f\|_{L^\infty}$ est plus grand que un et augmente avec n . Si $\{\ell_i\}_{i=0,n}$ désigne les fonctions de bases de Lagrange et π_h l'opérateur d'interpolation de Lagrange en une dimension on a

$$\|\pi_h\|_{L^\infty} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}([a,b]) \\ f \neq 0}} \frac{\|P_n\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^\infty}} = \sup_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^n |\ell_i(x)| = C(n) > 1, \quad n > 1,$$

où C est indépendant du paramètre de discrétisation h , mais dépend de n le degré du polynôme de Lagrange. Si on prend une discrétisation uniforme on peut prouver que (voir [141, 56])

$$\|\pi_h\|_{L^\infty} \leq 1 + \frac{2^{n+1}}{en \log n},$$

qui peut être optimisé quand les points d'interpolation sont les zéros des polynômes de Chebyshev de degré $n + 1$; alors la constante de stabilité devient

$$\|\pi_h\|_{L^\infty} \leq 1 + \frac{2}{\pi} \log n.$$

On en déduit qu'il est impossible d'obtenir la stabilité de l'opérateur d'interpolation au sens où il existe une constante C telle que

$$\|\Pi_h g\|_{L^\infty(\Omega)} \leq (1 + Ch) \|g\|_{L^\infty(\Omega)}, \forall g \in L^\infty(\Omega) \quad (3.12)$$

où h est le diamètre maximum des triangles et Π_h un opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre élevé (ordre > 1). De plus le même type d'estimation que (3.12) semble difficile à obtenir dans une autre norme de Lebesgue L^p avec $p \in [1, \infty]$. La condition de stabilité (3.12) est une estimation cruciale pour obtenir la convergence de la méthode numérique (cf chapitre 2 ou [32]). Cependant on peut montrer (voir chapitre 2 ou [33]) que la condition de stabilité (3.12) reste valable si on remplace la norme L^∞ par la norme L^2 , avec une interpolation de Lagrange symétrique d'ordre élevé sur une grille. Plus précisément, il est montré que la stabilité L^2 reste valable si et seulement si le pied de la caractéristique tombe dans une certaine région centrée dans l'élément fini. Si on symétrise l'interpolation de Lagrange on peut récupérer la stabilité L^2 . Même si ce résultat existe probablement sur des maillages non structurés (triangulation) il est inutile en pratique car on ne contrôle pas la zone où le pied de la caractéristique tombe dans le triangle. La preuve d'un tel résultat est très compliquée car il n'existe pas d'outil mathématique bien adapté pour étudier la stabilité L^2 sur des maillages non structurés. On considère maintenant des interpolations du type Hermite qui ne sont pas sujettes à ce problème.

3.6.2 Interpolation de type Hermite

L'interpolation du type Hermite nécessite non seulement la donnée des valeurs nodales mais aussi des gradients aux noeuds. La donnée du gradient pose un problème. Alors que sur une grille il est assez aisé d'obtenir une estimation du gradient via une méthode de différences finies, sur un maillage non structuré, cette dernière méthode n'est plus utilisable. Dans [157], plusieurs méthodes sont proposées pour obtenir une estimation du gradient à partir des valeurs nodales. Une première famille de méthodes locales consisterait à prendre une moyenne pondérée des pentes des plans passant à travers un certain ensemble de valeurs nodales. Une autre méthode locale serait de résoudre pour chaque valeur nodale un problème de moindres carrés local et pondéré afin de déterminer le polynôme quadratique local interpolant la valeur nodale et approchant au mieux, au sens des moindres carrés, la fonction de distribution dans un voisinage du point associé à la valeur nodale. Une méthode globale consisterait à calculer les gradients en assurant une variation cubique le long de chaque arête et en minimisant l'intégrale de la dérivée seconde au carré sur toutes les arêtes de la triangulation. Cette méthode conduirait à résoudre un système linéaire creux où les inconnues seraient

les gradients de la fonction de distribution en chaque point du maillage. Une variante de cette méthode serait la suivante :

Soit l_{ij} l'arête joignant deux points P_i et P_j du maillage, $I_{\mathcal{T}_h}$ la liste des indices qui représente l'ensemble des arêtes du maillage de sorte que $\mathcal{A}_h = \cup_{i,j \in I_{\mathcal{T}_h}} l_{ij}$ et enfin $h_{ij}(t)$ le polynôme cubique d'Hermite défini sur l_{ij} qui interpole les valeurs nodales f_i et f_j et les inconnues f'_i et f'_j aux points P_i et P_j . Avec ces notations on définit l'ensemble

$$\text{He}[\mathcal{T}_h] = \{\varphi; \varphi = f|_{\mathcal{A}_h} \text{ avec } f \in C^1(\Omega) \text{ et } \varphi|_{l_{ij}} = h_{ij}(t), i, j \in \mathcal{A}_h\},$$

c'est-à-dire l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 dont la restriction à l_{ij} $i, j \in \mathcal{A}_h$ sont des polynômes cubiques d'Hermite qui interpolent les valeurs nodales. Dans cet ensemble φ est alors choisi en résolvant par rapport aux inconnus que sont les gradients le problème de minimisation

$$\min_{\varphi \in \text{He}[\mathcal{T}_h]} I_P(\varphi)$$

avec

$$I_P(\varphi) = \sum_{i,j \in \mathcal{A}_h} \left\{ \int_{l_{ij}} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial l_{ij}^2} \right]^2 dl_{ij} + p^2 \int_{l_{ij}} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial l_{ij}} \right]^2 dl_{ij} \right\}$$

où dl_{ij} est l'élément de longueur le long de l_{ij} et $p \geq 0$ un paramètre de tension sur lequel une discussion est menée dans [11] et [12]. On ne choisira pas d'obtenir ∇f_h^{n+1} à partir de f_h^{n+1} , mais on cherchera à obtenir ∇f_h^{n+1} à partir d'un transport de ∇f_h^n comme il a été précisé dans l'algorithme semi-discrétisé en temps. On ne décrira que les éléments qui ont donné des résultats satisfaisants, pour les autres on renverra le lecteur aux références où ils sont décrits. Parmi les opérateurs d'interpolation testés certains présentent soit de mauvaises propriétés de stabilité (constante de stabilité trop grande) soit des propriétés d'approximation équivalentes à celles obtenues avec un opérateur de Lagrange d'ordre deux . Il y a entre autres la discrétisation par Barnhill et Little de l'interpolant BBG (Barnhill-Birkhoff-Gordon, [17], [20], [18], [103]), l'élément fini d'Hermite complet, [110] et l'élément de Kikuchi complet et réduit [125]. L'élément de Kikuchi donne de bons résultats mais la précision est légèrement moins bonne que celle obtenue avec un schéma d'interpolation de Lagrange d'ordre deux. Quant aux interpolants BBG et d'Hermite complet ils donnent de bons résultats sur des temps de simulation courts. En temps long, le "manque" de stabilité détériore gravement les résultats (tendance à l'explosion ou à la saturation). Notons au passage que nous n'avons pas programmé tous les schémas possibles, et notamment ceux contenus dans [156], [136], [137] qui semblent très intéressants, ainsi que les éléments singuliers \mathcal{C}^1 de Zienkiewicz, complet et réduit, et ceux de Birkhoff-Mansfield (voir [39], [110] et les références incluses). On pourrait aussi chercher à implémenter l'interpolant d'Hermite défini par des surfaces de classes \mathcal{C}^1 quadratiques par morceaux décrit dans [171] et [178], et mettre en oeuvre d'autres interpolants (quadratique, cubique et quartique) dont les idées se trouvent dans [179], [82], [112] [146] et [160].

Ici on a considéré que des opérateurs d'interpolation locale car une reconstruction

locale est *a priori* moins coûteuse et plus rapide. Cependant il serait intéressant d'explorer des opérateurs d'interpolation globaux, car ils possèdent des propriétés utiles (principe du maximum, régularité \mathcal{C}^∞ , ...). On peut consulter à ce sujet les articles [191] et [104]. Ces méthodes ont été adaptées pour obtenir des versions locales, notamment en introduisant une interpolation au sens des moindres carrés pondérés. On pourra par exemple consulter les articles [92] et [93] ainsi que les références incluses. D'autres types d'interpolations globales et bien adaptées à une répartition irrégulière des données qui, de plus, peuvent s'adapter sous forme locale seraient les splines de type plaque mince ([169], [170], [74], [75], [149], [192], [22]), les splines polyharmoniques ([76], [143]), les B-splines m-harmoniques, et de manière plus générale l'interpolation par des fonctions de bases radiales ([44], [45], [77], [78], [167], [168], [21], [181], [182], [211], [122]). Un grand nombre de méthodes (locales et globales) font l'objet d'une comparaison sur des critères multiples dans [91].

Enfin les éléments qui donnent les résultats souhaités sont ceux d'Hermite réduit [110], de Nielson [156], d'Hsieh-Clough-Tocher complet et réduit [110], [25], [27] et de Ganey-Dimitrov [26]. Nous allons maintenant décrire ces éléments.

Afin d'utiliser un opérateur d'interpolation local on a besoin de définir le triplet (T, P_T, Σ_T) . Selon l'opérateur d'interpolation considéré, l'espace d'approximation sera

$$X_h = \{f \in \mathcal{C}^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega); f|_{T_j} \in P_T(T_j) \forall T_j \in \mathcal{T}_h\},$$

ou

$$Y_h = \{f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap H^2(\Omega); f|_{T_j} \in P_T(T_j) \forall T_j \in \mathcal{T}_h\}.$$

On présente différents opérateurs d'interpolation locale qui requièrent la connaissance de f et ∇f . En fait on a juste besoin de définir Σ_T et Π_T . Dans la suite on désignera par P_2 et P_3 l'ensemble des polynômes de degré deux et trois. Finalement on introduit la notation $\text{mod } j = i - E(i/j) * j$, E désignant la partie entière.

La solution du problème continu est régulière, typiquement dans $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega})$. Dans l'espace des vitesses la solution est rapidement décroissante et dans l'espace physique la solution est périodique ou à décroissance rapide. Notons que ces propriétés doivent être vérifiées seulement par la donnée initiale pour qu'elles restent vraies en tout temps.

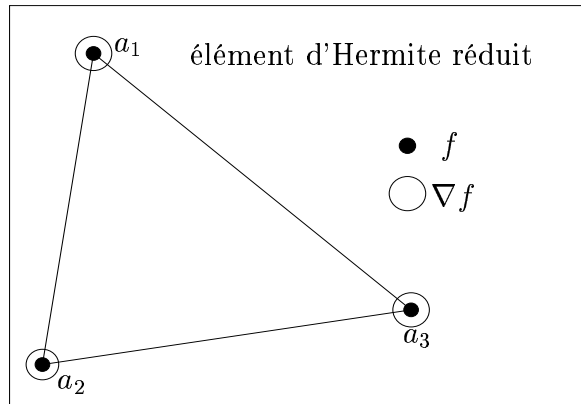
3.6.2.1 L'élément réduit \mathcal{C}^0 d'Hermite (HC0).

L'ensemble des degrés de liberté est donné par

$$\Sigma_T = \{f(a_i) : 1 \leq i \leq 3; \partial_x f(a_i), \partial_v f(a_i) : 1 \leq i \leq 3\},$$

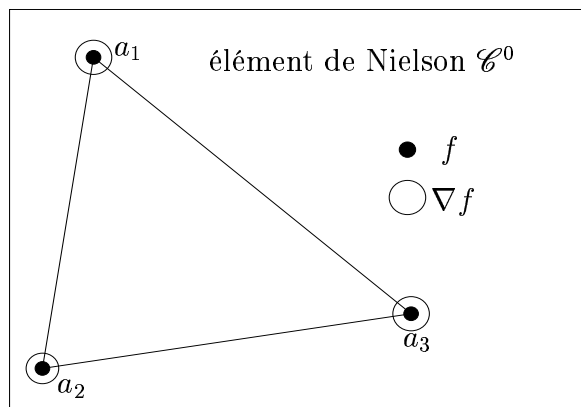
et l'opérateur local d'interpolation Π_T est défini pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^0(\bar{T})$ par

$$\begin{aligned} \Pi_T f = & \sum_{i=1}^3 f(a_i)(-2\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 + 2\lambda_i\lambda_j\lambda_k) + \\ & \frac{\lambda_i\lambda_j}{2}(\lambda_i - \lambda_j + 1)\nabla f(a_i) \cdot (a_j - a_i) + \frac{\lambda_i\lambda_k}{2}(\lambda_i - \lambda_k + 1)\nabla f(a_i) \cdot (a_k - a_i) \end{aligned}$$

FIG. 3.2 – Élément réduit \mathcal{C}^0 d'Hermite

où $\{\lambda_i\}_{i=1,\dots,3}$ sont les coordonnées barycentriques, $j = i \bmod 3 + 1$, et $k = j \bmod 3 + 1$. Notons que $P_2 \subset P_T \subset P_3$. En fait $\Pi_T f$ est \mathcal{C}^1 sur \overline{T} excepté à la traversée des arêtes (cf [110]).

3.6.2.2 L'élément cubique \mathcal{C}^0 de Nielson (NC0).

FIG. 3.3 – Élément \mathcal{C}^0 de Nielson

L'ensemble des degrés de liberté est

$$\Sigma_T = \{f(a_i) : 1 \leq i \leq 3; \partial_x f(a_i), \partial_v f(a_i) : 1 \leq i \leq 3\},$$

et l'opérateur local d'interpolation Π_T est défini pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^0(\overline{T})$ par

$$\begin{aligned} \Pi_T f = & \sum_{i=1}^3 f(a_i)(-2\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 + 2\lambda_i\lambda_j\lambda_k) + \\ & \lambda_i\lambda_j(\lambda_i + \frac{1}{2}\lambda_k)\nabla f(a_i) \cdot (a_j - a_i) + \lambda_i\lambda_k(\lambda_i + \frac{1}{2}\lambda_j)\nabla f(a_i) \cdot (a_k - a_i), \end{aligned}$$

où, $j = i \bmod 3 + 1$, $k = j \bmod 3 + 1$, et $P_2 \subset P_T \subset P_3$. En fait $\Pi_T f$ est \mathcal{C}^1 sur \overline{T} excepté à la traversée des arêtes (cf [155]).

3.6.2.3 L'élément cubique \mathcal{C}^1 rationnel singulier de Nielson (NC1).

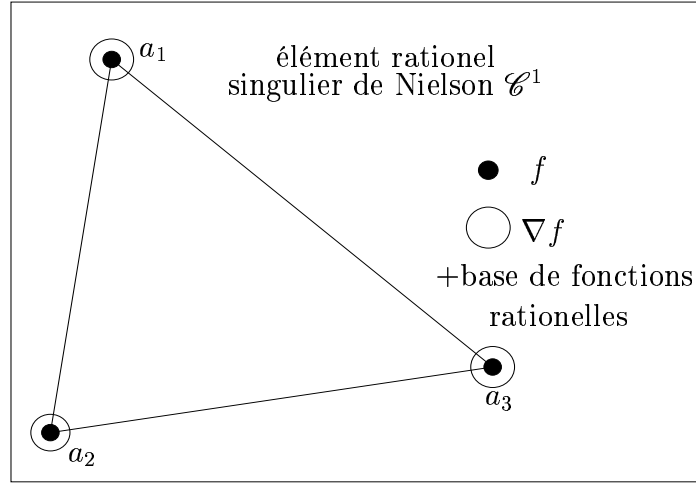


FIG. 3.4 – Élément cubique \mathcal{C}^1 rationnel singulier de Nielson

L'ensemble des degrés de liberté est donné par

$$\Sigma_T = \{f(a_i) : 1 \leq i \leq 3; \partial_x f(a_i), \partial_v f(a_i) : 1 \leq i \leq 3\},$$

et l'opérateur local d'interpolation Π_T est défini pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^1(\overline{T})$ par

$$\begin{aligned} \Pi_T f &= \sum_{i=1}^3 f(a_i)(\lambda_i^2(3 - 2\lambda_i) + 6w\lambda_i(\lambda_k\alpha_{ij} + \lambda_j\alpha_{ik})) + \\ &\quad \nabla f(a_i) \cdot (a_j - a_i)[\lambda_i^2\lambda_j + w\lambda_i(3\lambda_j\alpha_{ik} + \lambda_k - \lambda_j)] + \\ &\quad \nabla f(a_i) \cdot (a_k - a_i)[\lambda_i^2\lambda_k + w\lambda_i(3\lambda_k\alpha_{ij} + \lambda_j - \lambda_k)], \end{aligned}$$

où

$$w = \frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3},$$

$$\alpha_{ij} = \frac{\|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - \|e_k\|^2}{2\|e_j\|^2},$$

et $\|e_i\|$ désigne la longueur du côté e_i opposé au noeud a_i . On a la relation $P_2 \subset P_T \subset P_3$. En fait on récupère la continuité \mathcal{C}^1 à travers les arêtes en ajoutant des polynômes rationnelles (cf [155] et [110]). De plus l'opérateur NC1 a de

bonnes propriétés de stabilité puisqu'il est issu de la discrétisation de l'opérateur $\mathcal{M}[f]$ caractérisé comme l'unique interpolant qui minimise la pseudo-norme

$$\left(\int_T \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial v}(x, v) \right|^2 dx dv \right)^{1/2}$$

parmi toutes les fonctions dans $\mathcal{C}^4(T)$ qui interpolent $f \in \mathcal{C}^4(T)$ et ses premières dérivées sur la frontière de T (cf [155]).

3.6.2.4 L'élément cubique \mathcal{C}^1 de Hsieh-Clough-Tocher complet (HCT-C)

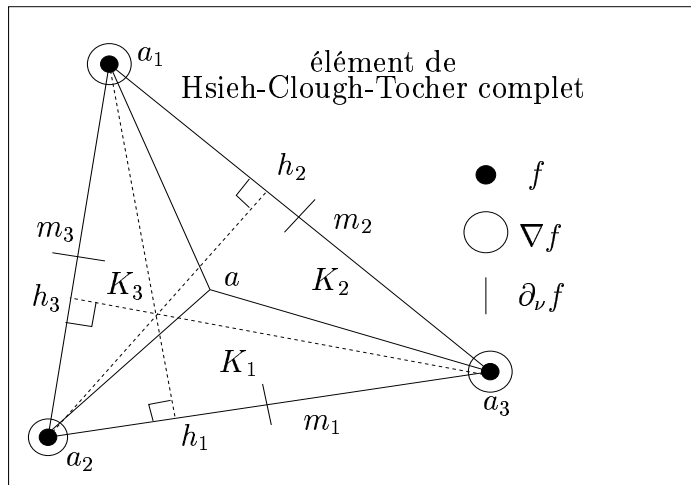


FIG. 3.5 – Élément de Hsieh-Clough-Tocher complet \mathcal{C}^1

Si a_i est un noeud du triangle T , alors on désigne respectivement par l_i , et m_i la longueur et le milieu du coté T opposé au noeud a_i . On désigne par h_i le point d'intersection entre le coté opposé au noeud a_i et la perpendiculaire à ce coté qui passe par le noeud a_i . Alors on introduit $n_i = |h_i - a_i|$ et ν_i la normale extérieure du coté opposé à a_i . Soit a le barycentre de T , alors K_i désigne le sous triangle de T construit sur les noeuds a, a_j , et a_k où $1 \leq i \leq 3, j = i \bmod 3 + 1$ et $k = j \bmod 3 + 1$. Finalement on introduit les paramètres d'excentricité e_i définis par

$$e_i = \frac{l_k^2 - l_j^2}{l_i^2}.$$

L'ensemble des degrés de liberté est donné par

$$\Sigma_T = \{f(a_i) : 1 \leq i \leq 3; \partial_x f(a_i), \partial_\nu f(a_i), \partial_\nu f(m_i) : 1 \leq i \leq 3\},$$

où ∂_{ν_i} désigne la dérivée normale. On peut remplacer Σ_T par Σ'_T où

$$\Sigma'_T = \{f(a_i) : 1 \leq i \leq 3; \partial_x f(a_i), \partial_\nu f(a_i), \partial_x f(m_i), \partial_\nu f(m_i) : 1 \leq i \leq 3\}.$$

L'opérateur local d'interpolation Π_T est défini pour toute fonction f dans $\mathcal{C}^1(\overline{T})$

par

$$\Pi_T f|_{\kappa_l} = \sum_{i=l}^{(l+1) \bmod 3+1} f(a_i) \Psi_{l,i}^0 + (\nabla f(a_i) \cdot \overline{a_i a_k}) \Psi_{l,i,k}^1 + (\nabla f(a_i) \cdot \overline{a_i a_j}) \Psi_{l,i,j}^1 + \left(\nabla f(m_i) \cdot \overline{h_i a_i} \right) \Psi_{\perp,l,i}^1$$

ou par

$$\Pi_T f|_{\kappa_l} = \sum_{i=l}^{(l+1) \bmod 3+1} f(a_i) \Psi_{l,i}^0 + (\nabla f(a_i) \cdot \overline{a_i a_k}) \Psi_{l,i,k}^1 + (\nabla f(a_i) \cdot \overline{a_i a_j}) \Psi_{l,i,j}^1 - \left(n_i \frac{\partial f}{\partial \nu_i}(m_i) \right) \Psi_{\perp,l,i}^1.$$

Les fonctions de bases $\{\Psi_l\}$ sont définies par

$$\Xi_l = \Sigma_l \Lambda_l$$

avec $i = l$, $j = i \bmod 3 + 1$ et $k = j \bmod 3 + 1$

$$\Xi_l = (\Psi_{l,i}^0, \Psi_{l,j}^0, \Psi_{l,k}^0, \Psi_{l,i,k}^1, \Psi_{l,i,j}^1, \Psi_{l,j,i}^1, \Psi_{l,i,k}^1 \Psi_{l,k,j}^1, \Psi_{l,k,i}^1, \Psi_{\perp,l,i}^1, \Psi_{\perp,l,j}^1, \Psi_{\perp,l,k}^1)^T,$$

$$\Lambda_l = (\lambda_i^3, \lambda_j^3, \lambda_k^3, \lambda_i^2 \lambda_k, \lambda_i^2 \lambda_j, \lambda_j^2 \lambda_i, \lambda_j^2 \lambda_k, \lambda_k^2 \lambda_j, \lambda_k^2 \lambda_i, \lambda_i \lambda_j \lambda_k)^T$$

et

$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(e_j - e_k) & 0 & 0 & \frac{3}{2}(3 + e_j) & \frac{3}{2}(3 - e_k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - 2e_i - e_k) & 1 & 0 & -\frac{3}{2}(1 - e_i) & \frac{3}{2}(e_i + e_k) & 3 & 3 & 0 & 0 & 3(3 - e_i) \\ \frac{1}{2}(1 + 2e_i - e_j) & 0 & 1 & -\frac{3}{2}(e_i + e_j) & -\frac{3}{2}(1 + e_i) & 0 & 0 & 3 & 3 & 3(3 + e_i) \\ -\frac{1}{12}(1 + e_j) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(7 + e_j) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12}(1 - e_k) & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4}(7 - e_k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{12}(7 + e_k) & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(5 + e_k) & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{6}(4 - e_i) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(3 - e_i) & -\frac{1}{4}(5 - e_i) & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(3 - e_i) \\ \frac{1}{6}(4 + e_i) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(5 + e_i) & -\frac{1}{4}(3 + e_i) & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(3 + e_i) \\ -\frac{1}{12}(7 - e_j) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(5 - e_j) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{4}{3} & 0 & 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{3} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a l'égalité $P_T = P_3$. Pour une preuve de la continuité \mathcal{C}^1 et une estimation de l'erreur d'interpolation on renvoie le lecteur à la référence [110].

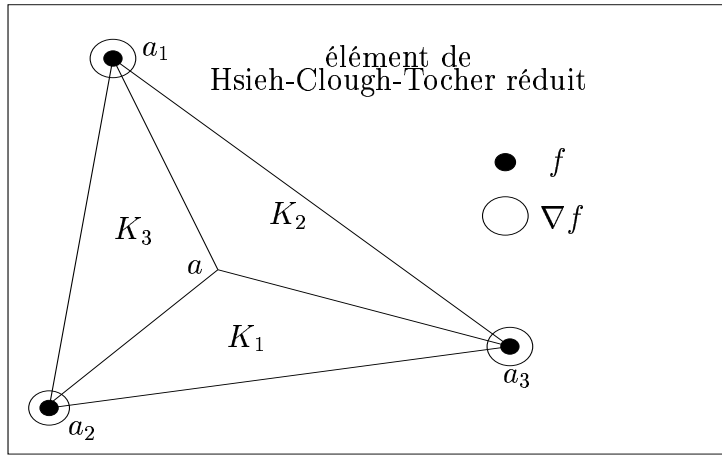
3.6.2.5 L'élément cubique \mathcal{C}^1 réduit de Hsieh-Clough-Tocher (HCT-R)

Avec les mêmes notations que précédemment l'ensemble des degrés de liberté est donné par

$$\Sigma_T = \{f(a_i) : 1 \leq i \leq 3; \partial_x f(a_i), \partial_v f(a_i) : 1 \leq i \leq 3\}.$$

L'opérateur local d'interpolation Π_T est défini pour tout f dans $\mathcal{C}^1(\overline{T})$ par

$$\Pi_T f|_{\kappa_l} = \sum_{i=l}^{(l+1) \bmod 3+1} f(a_i) \Psi_{l,i}^0 + (\nabla f(a_i) \cdot \overline{a_i a_k}) \Psi_{l,i,k}^1 + (\nabla f(a_i) \cdot \overline{a_i a_j}) \Psi_{l,i,j}^1.$$

FIG. 3.6 – Élément cubique \mathcal{C}^1 réduit de Hsieh-Clough-Tocher

Les fonctions de bases $\{\Psi_l\}$ sont définies par

$$\Xi_l = \Sigma_l \Lambda_l$$

avec $i = l$, $j = i \bmod 3 + 1$ et $k = j \bmod 3 + 1$

$$\Xi_l = (\Psi_{l,i}^0, \Psi_{l,j}^0, \Psi_{l,k}^0, \Psi_{l,i,k}^1, \Psi_{l,i,j}^1, \Psi_{l,j,i}^1, \Psi_{l,i,k}^1, \Psi_{l,k,j}^1, \Psi_{l,k,i}^1)^T,$$

$$\Lambda_l = (\lambda_i^3, \lambda_j^3, \lambda_k^3, \lambda_i^2 \lambda_k, \lambda_i^2 \lambda_j, \lambda_j^2 \lambda_i, \lambda_j^2 \lambda_k, \lambda_k^2 \lambda_j, \lambda_k^2 \lambda_i, \lambda_i \lambda_j \lambda_k)^T$$

et

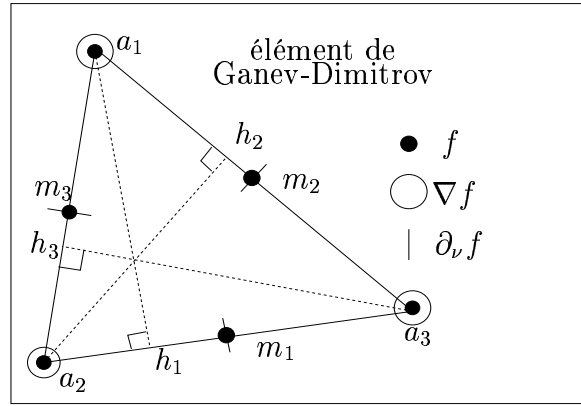
$$\Sigma_l = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(e_j - e_k) & 0 & 0 & \frac{3}{2}(3 + e_j) & \frac{3}{2}(3 - e_k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}(1 - 2e_i - e_k) & 1 & 0 & -\frac{3}{2}(1 - e_i) & \frac{3}{2}(e_i + e_k) & 3 & 3 & 0 & 0 & 3(1 - e_i) \\ \frac{1}{2}(1 + 2e_i - e_j) & 0 & 1 & -\frac{3}{2}(e_i + e_j) & -\frac{3}{2}(1 + e_i) & 0 & 0 & 3 & 3 & 3(1 + e_i) \\ -\frac{1}{4}(1 + e_j) & 0 & 0 & \frac{1}{4}(5 + e_j) & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}(1 - e_k) & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}(5 - 3e_k) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4}(1 - e_k) & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4}(1 - 3e_k) & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2}e_i & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(1 - 3e_i) & \frac{1}{4}(1 + 3e_i) & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(1 - 3e_i) \\ \frac{1}{2}e_i & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1 - 3e_i) & -\frac{1}{4}(1 + 3e_i) & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(1 + 3e_i) \\ \frac{1}{4}(1 + e_j) & 0 & 0 & -\frac{1}{4}(1 + 3e_j) & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

On a la relation $P_2 \subset P_T \subset P_3$. En fait HCT-R est obtenu à partir de HCT-C en supposant que les gradients varient de manière linéaire le long des arêtes. Pour une preuve de la continuité \mathcal{C}^1 et une estimation de l'erreur d'interpolation voir [110].

3.6.2.6 L'élément quartique \mathcal{C}^1 de Ganev-Dimitrov

Les degrés de liberté sont donnés par l'ensemble

$$\Sigma_T = \{f(a_i), \partial_x f(a_i), \partial_y f(a_i), f(m_i), \partial_{\nu_i} f(m_i) : 1 \leq i \leq 3\},$$

FIG. 3.7 – Élément de Ganev-Dimitrov \mathcal{C}^1

où ∂_{ν_i} désigne la dérivée normale.

L'interpolant est un polynôme de degré 4, de classe $C^1(\bar{T})$. Pour tout f dans $C^1(\bar{T})$, son expression est donnée par

$$\Pi_T f = \sum_{i=1}^3 f(a_i) \Psi_i^0 + (\nabla f(a_i) \cdot \overline{a_i a_k}) \Psi_{i,k}^1 + (\nabla f(a_i) \cdot \overline{a_i a_j}) \Psi_{i,j}^1 + f(m_i) \Psi_i^{\perp,0} - \left(n_i \frac{\partial f}{\partial \nu_i}(m_i) \right) \Psi_i^{\perp,1}$$

avec $j = i \bmod 3 + 1$ et $k = j \bmod 3 + 1$.

Les fonctions de bases sont définies par

$$\Xi = \Sigma \Lambda,$$

avec

$$\Xi = (\Psi_1^0, \Psi_2^0, \Psi_3^0, \Psi_{1,3}^1, \Psi_{1,2}^1, \Psi_{2,1}^1, \Psi_{2,3}^1, \Psi_{3,2}^1, \Psi_{3,1}^1, \Psi_1^{\perp,0}, \Psi_2^{\perp,0}, \Psi_3^{\perp,0}, \Psi_1^{\perp,1}, \Psi_2^{\perp,1}, \Psi_3^{\perp,1})^T,$$

$$\Lambda = (\lambda_1^4, \lambda_2^4, \lambda_3^4, \lambda_1^3 \lambda_3, \lambda_1^3 \lambda_2, \lambda_2^3 \lambda_1, \lambda_2^3 \lambda_3, \lambda_3^3 \lambda_2, \lambda_3^3 \lambda_1, \lambda_2^2 \lambda_3^2, \lambda_3^2 \lambda_1^2, \lambda_1^2 \lambda_2^2, \lambda_1^2 \lambda_2 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_2^2 \lambda_3, \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3^2)^T,$$

et

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & -5 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc}
3(e_2 - e_3) - 4 & -3(e_2 + e_3) & 3(e_2 + e_3) \\
3(e_1 + e_3) & 3(e_3 - e_1) - 4 & -3(e_1 + e_3) \\
-3(e_2 + e_1) & 3(e_2 + e_1) & 3(e_1 - e_2) - 4 \\
-\frac{1}{2}(1 - e_2) & -\frac{1}{2}(1 + e_2) & \frac{1}{2}(1 + e_2) \\
-\frac{1}{2}(1 + e_3) & \frac{1}{2}(1 - e_3) & -\frac{1}{2}(1 - e_3) \\
\frac{1}{2}(1 + e_3) & -\frac{1}{2}(1 - e_3) & -\frac{1}{2}(1 + e_3) \\
-\frac{1}{2}(1 - e_1) & -\frac{1}{2}(1 + e_1) & \frac{1}{2}(1 - e_1) \\
\dots & -\frac{1}{2}(1 + e_1) & -\frac{1}{2}(1 - e_1) \\
\frac{1}{2}(1 - e_2) & -\frac{1}{2}(1 - e_2) & -\frac{1}{2}(1 + e_2) \\
-16 & 16 & 16 \\
16 & -16 & 16 \\
16 & 16 & -16 \\
-4 & 4 & 4 \\
4 & -4 & 4 \\
4 & 4 & -4
\end{array}$$

On a l'égalité $P_T = P_4$. L'estimation de l'erreur d'interpolation est donnée dans [26].

3.6.3 Discrétisation complète du schéma

Maintenant, on peut écrire la discrétisation complète du schéma. A partir de l'opérateur local d'interpolation Π_T on peut définir l'opérateur global d'interpolation Π_h de $\mathcal{C}^0(\bar{\Omega})$ (resp. $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$) dans X_h (resp. Y_h) par la relation (3.11). Par exemple l'espace de discrétisation Y_h construit sur l'élément cubique \mathcal{C}^1 de Nielson admet comme fonctions de bases $\{\varphi_k\}_{k=1,\dots,N}$, $\{\psi_k\}_{k=1,\dots,N}$ et $\{\eta_k\}_{k=1,\dots,N}$ tel que

$$(\Pi_h f)(x, v) = \sum_{k=1}^N f_k \eta_k(x, v) + \partial_x f_k \psi_k(x, v) + \partial_v f_k \varphi_k(x, v) \quad \forall f \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega})$$

où

$$f_k = f(x_k, v_k), \quad \partial_x f_k = (\partial_x f)(x_k, v_k) \text{ and } \partial_v f_k = (\partial_v f)(x_k, v_k).$$

On commence au temps t^n où on connaît la fonction de distribution $f_h^n(x, v)$ qui peut s'écrire comme

$$f_h^n(x, v) = \sum_{k=1}^N f_{h,k}^n \eta_k(x, v) + \partial_x f_{h,k}^n \psi_k(x, v) + \partial_v f_{h,k}^n \varphi_k(x, v),$$

où $\{f_{h,k}^n\}_{k=1}^N$, $\{\partial_x f_{h,k}^n\}_{k=1}^N$ et $\{\partial_v f_{h,k}^n\}_{k=1}^N$ sont les degrés de liberté de l'espace Y_h . Maintenant on développe l'algorithme pour atteindre le temps t^{n+1} .

1. Première demie advection dans l'espace physique. :

$$f_h^*(x, v) = \Pi_h f_h^n(x - v\Delta t/2, v),$$

c'est-à-dire

$$f_h^*(x, v) = \sum_{k=1}^N f_{h,k}^* \eta_k(x, v) + \partial_x f_{h,k}^* \psi_k(x, v) + \partial_v f_{h,k}^* \varphi_k(x, v),$$

$$\begin{aligned}
f_{h,k}^* &= f_h^n(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k) \\
\text{où } \partial_x f_{h,k}^* &= \partial_x f_h^n(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k) \\
\partial_v f_{h,k}^* &= -\frac{\Delta t}{2} \partial_x f_h^n(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k) + \partial_v f_h^n(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k).
\end{aligned}$$

2. Calcul du champ électrique $E_h^*(x)$ en substituant f_h^* dans l'équation de Poisson qui peut être discrétisée par un schéma numérique classique comme les méthodes de différences finies ou d'éléments finis.
3. Advection entière dans l'espace des vitesses :

$$f_h^{**}(x, v) = \Pi_h f_h^*(x, v - E_h^*(x) \Delta t / 2, v),$$

c'est-à-dire

$$f_h^{**}(x, v) = \sum_{k=1}^N f_{h,k}^{**} \eta_k(x, v) + \partial_x f_{h,k}^{**} \psi_k(x, v) + \partial_v f_{h,k}^{**} \varphi_k(x, v),$$

où

$$\begin{aligned}
f_{h,k}^{**} &= f_h^*(x_k, v_k - E_h^*(x_k) \Delta t) \\
\partial_x f_{h,k}^{**} &= \partial_x f_h^*(x_k, v_k - E_h^*(x_k) \Delta t) - \Delta t \partial_x E_h^*(x_k) \partial_v f_h^*(x_k, v_k - E_h^*(x_k) \Delta t) \\
\partial_v f_{h,k}^{**} &= \partial_v f_h^*(x_k, v_k - E_h^*(x_k) \Delta t).
\end{aligned}$$

4. Seconde demie advection dans l'espace physique :

$$f_h^{n+1}(x, v) = \Pi_h f_h^{**}(x - v \Delta t / 2, v),$$

c'est-à-dire

$$f_h^{n+1}(x, v) = \sum_{k=1}^N f_{h,k}^{n+1} \eta_k(x, v) + \partial_x f_{h,k}^{n+1} \psi_k(x, v) + \partial_v f_{h,k}^{n+1} \varphi_k(x, v),$$

où

$$\begin{aligned}
f_{h,k}^{n+1} &= f_h^{**}(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k) \\
\partial_x f_{h,k}^{n+1} &= \partial_x f_h^{**}(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k) \\
\partial_v f_{h,k}^{n+1} &= -\frac{\Delta t}{2} \partial_x f_h^{**}(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k) + \partial_v f_h^{**}(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k).
\end{aligned}$$

3.6.4 Schémas conservatifs et positifs

Les schémas précédents ne conservent ni la positivité ni la masse. Ceci est en fait une caractéristique des opérateurs d'interpolation considérés. La non préservation de la positivité et de la masse peut être un inconvénient pour les simulations en temps long car des oscillations se développent. Afin de recouvrer la positivité de f et la conservation de la masse on utilise les idées de Priestley [173] et Staniforth [197] qui ont été appliquées dans les codes de prédiction météorologique.

Avant tout, on va définir les propriétés que doit vérifier la solution. L'algorithme fournira une solution positive si la solution vérifie le "principe du maximum" suivant :

$$f_{\min}^n \leq f_{h,l}^{n+1} \leq f_{\max}^n, \quad \forall l, \forall n \quad (3.13)$$

où

$$f_{\min}^n = \min_k \{f_{h,k}^n\}, \quad f_{\max}^n = \max_k \{f_{h,k}^n\}.$$

La solution conserve la masse si

$$\sum_k f_{h,k}^n \mathcal{A}_k = \sum_k f_{h,k}^0 \mathcal{A}_k = M_0, \quad (3.14)$$

où \mathcal{A}_k (discrétisation de la mesure de Lebesgue $dx dv$) est l'aire associée au noeud N_k tel que $\cup_k \mathcal{A}_k = \overline{\Omega}$.

Maintenant on explique comment obtenir un schéma positif et conservatif en l'appliquant sur la première demie advection dans l'espace physique. L'algorithme est le même pour les autres advections.

Soit $f_{L_h}^*(x, v)$, une solution d'ordre faible calculée selon le premier pas de l'algorithme décrit précédemment, avec l'opérateur d'interpolation de Lagrange d'ordre un par exemple. Soit $f_{H_h}^*(x, v)$ une solution d'ordre élevé calculée selon le premier pas de l'algorithme décrit précédemment, avec l'un des opérateurs d'interpolation d'Hermite décrits plus haut. Soit $f_{L_h,k}^* = f_{L_h}^*(x_k, v_k)$ et $f_{H_h,k}^* = f_{H_h}^*(x_k, v_k)$. On suppose que le triangle T_j contient le point $(x_k - v_k \Delta t / 2, v_k)$ qui est au temps t^n l'approximation du point de départ de la courbe caractéristique qui s'arrête au point (x_k, v_k) au temps t^{n+1} . Soit N_T le nombre de noeuds portés par le triangle T sur lesquels on connaît f_h^n . On définit f^+ et f^- par

$$f^+ = \max\{f_{h,1}^n, \dots, f_{h,N_T}^n\}$$

et

$$f^- = \min\{f_{h,1}^n, \dots, f_{h,N_T}^n\}.$$

On pose alors

$$\bar{f}_k = \begin{cases} f^+ & \text{if } f_{H_h,k}^* > f^+ \\ f^- & \text{if } f_{H_h,k}^* < f^- \\ f_{H_h,k}^* & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $f_{L_h,k}^* - f_{H_h,k}^* \neq 0$ alors on définit

$$\gamma_k^{\max} = \frac{\bar{f}_k - f_{L_h,k}^*}{f_{H_h,k}^* - f_{L_h,k}^*},$$

sinon on pose

$$\gamma_k^{\max} = 1.$$

Alors si on pose

$$f_{h,k}^* = \gamma_k^{\max} f_{H_h,k}^* + (1 - \gamma_k^{\max}) f_{L_h,k}^*$$

on voit que la solution satisfait le principe du maximum au sens de (3.13). Ceci reste valable si on remplace l'ensemble $\{\gamma_k^{\max}\}$ par n'importe quel ensemble $\{\gamma_k^*\}$ pour peu que l'on ait $\gamma_k^* \leq \gamma_k^{\max}, \forall k$. Afin d'obtenir une solution conservative on doit remplacer l'ensemble $\{\gamma_k^{\max}\}$ par l'ensemble optimal $\{\gamma_k\}$ pour lequel la solution préserve à la fois le principe du maximum et la masse. Afin d'obtenir une solution qui préserve le principe du maximum (3.13) l'ensemble $\{\gamma_k\}$ doit satisfaire les contraintes

$$0 \leq \gamma_k \leq \gamma_k^{\max}.$$

De plus, si on veut que la solution conserve la masse il faut imposer la contrainte (3.14). On définit

$$\xi_k = (f_{H_h,k}^* - f_{L_h,k}^*) \mathcal{A}_k$$

alors la condition (3.14) peut se récrire comme

$$\sum_k \gamma_k \xi_k = M_0 - \sum_k f_{L_h,k}^* \mathcal{A}_k = M^*.$$

Notons que si $\gamma_k \rightarrow 1$ alors on obtient une reconstruction d'ordre élevé. Au contraire, on obtient une solution d'ordre faible si $\gamma_k \rightarrow 0$. Afin d'obtenir une reconstruction d'ordre élevé aussi souvent que possible, le problème, peut consister à minimiser la fonction coût

$$\mathcal{L}(\gamma) = - \sum_k \gamma_k$$

où les inconnues $\{\gamma_k\}$ sont assujeties aux contraintes

$$0 \leq \gamma_k \leq \gamma_k^{\max}, \quad \sum_k \gamma_k \xi_k = M^*.$$

On obtient ainsi un problème d'optimisation (ou de programmation) linéaire. Alors que les problèmes de programmation linéaire sont résolus entre autres à partir de la méthode du simplexe, on présentera par la suite une autre méthode (cf [173]) qui ne résout que les contraintes sans se préoccuper de minimiser la fonction coût. Notons que l'on peut chercher à imposer la conservation d'autres quantités physiques comme l'énergie, l'entropie et d'autres moments qui conduisent à la résolution de problèmes d'optimisation non linéaires. Par exemple on peut chercher à minimiser, sous les mêmes contraintes de conservation de la masse et du principe du maximum, la perte de la norme L^2 (minimisation de la diffusion) avec la fonction coût quadratique

$$\mathcal{L}(\gamma) = \left| \|f_h(0)\|_{L_h^2} - \|f_h(t^n)\|_{L_h^2} \right|$$

où

$$\|f_h(t^n)\|_{L_h^2} = \left(\sum_k (\gamma_k (f_{H_h,k}^n - f_{L_h,k}^n) + f_{L_h,k}^n)^2 \mathcal{A}_k \right)^{1/2}.$$

Si on a

$$\sum_k \gamma_k^{\max} \xi_k = M^*, \tag{3.15}$$

alors la masse est conservée et on a trouvé une solution positive qui préserve le principe du maximum discret (3.13) et qui conserve la masse (3.14).

Maintenant supposons que

$$\sum_k \gamma_k^{\max} \xi_k > M^*. \quad (3.16)$$

Si ce n'est pas le cas, sans perte de généralité, on pose $\xi_k = -\xi_k$ et $M^* = -M^*$ afin d'obtenir l'inégalité (3.16).

Afin de réduire le plus possible le membre gauche de (3.16) les termes négatifs de la somme (3.16) sont affectés du plus haut coefficient possible. Cette règle nous permet de définir un tableau *iflag* tel que

$$\begin{aligned} \text{si } \xi_k \leq 0 \text{ alors } \gamma_k &= \gamma_k^{\max}, \text{ iflag}(k) = 1, \\ \text{si } \xi_k > 0 \text{ alors } \gamma_k &= 0, \text{ iflag}(k) = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Maintenant on doit calculer les coefficients γ_k pour lesquels $\text{iflag}(k) = 0$. Pour cela on définit la quantité

$$\text{surplus} = M^* - \sum_{\text{iflag}(k)=1} \gamma_k \xi_k \quad (3.18)$$

et une valeur moyenne de γ_k

$$\gamma_{\text{moy}} = \frac{\text{surplus}}{\sum_{\text{iflag}(k)=0} \gamma_k \xi_k}. \quad (3.19)$$

Notons que la quantité *surplus* ou tous les ξ_k peuvent *a priori* être négatifs. Dans ce cas il n'existe pas de solution conservative et la meilleure attitude à adopter afin de limiter la perte de masse est de choisir les γ_k de la même façon que lors de l'étape d'initialisation (3.17). L'étude de l'existence et de l'unicité d'une solution du problème de minimisation reste une question ouverte. Si ce n'est pas le cas alors les valeurs γ_k^{\max} pour lesquels $\text{iflag}(k) = 0$ sont comparées avec la valeur moyenne γ_{moy} et on égalise $\{\gamma_k\}_{\text{iflag}(k)=0}$ à cette valeur moyenne si cette dernière ne dépasse pas les bornes supérieures $\{\gamma_k^{\max}\}_{\text{iflag}(k)=0}$. Autrement dit

$$\text{si } \gamma_{\text{moy}} < \gamma_k^{\max} \forall k \text{ tel que } \text{iflag}(k) = 0, \text{ alors } \gamma_k = \gamma_{\text{moy}}, \text{ iflag}(k) = 1.$$

D'un autre côté, si les coefficients γ_k^{\max} pour lesquels $\text{iflag}(k) = 0$ sont plus petits que la valeur moyenne γ_{moy} on les égalise à leur valeur maximum, c'est-à-dire

$$\text{si } \gamma_{\text{moy}} > \gamma_k^{\max} \forall k \text{ tel que } \text{iflag}(k) = 0, \text{ alors } \gamma_k = \gamma_k^{\max}, \text{ iflag}(k) = 1,$$

les autres coefficients restant inchangés. Ensuite on fait une nouvelle évaluation des quantités (3.18) et (3.19). L'algorithme se termine avec succès lorsqu'on a trouvé une valeur de γ_{moy} qui ne dépasse aucun γ_k^{\max} ou lorsque $\text{iflag}(k) = 1$ pour tout k . Notons que chercher un ensemble $\{\gamma_k\}$ afin de conserver la masse et d'assurer le principe de maximum détériore l'ordre de précision.

3.7 Résultats numériques

Dans cette section on présente les résultats numériques obtenus dans le domaine de la physique des plasmas, avec différentes méthodes conservatives ou non.

Ces différentes méthodes seront testées avec différentes techniques de reconstruction pour la résolution du système de Vlasov-Poisson avec des conditions aux limites périodiques. L'équation de Vlasov,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} + E(t, x) \frac{\partial f}{\partial v} = 0$$

est couplée avec l'équation de Poisson normalisée

$$E(t, x) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv - 1.$$

Selon la description du schéma numérique de la section 3.6 on doit calculer le gradient du champ électrique. Ici ce calcul est simple car l'équation de Poisson donne

$$\frac{\partial E}{\partial x}(t, x) = \rho(x) - 1 = \int_{\mathbb{R}} f(t, x, v) dv - 1.$$

3.7.1 L'amortissement Landau linéaire

La donnée initiale est

$$f(0, x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2)(1 + \alpha \cos(kx)), \quad \forall (x, v) \in [0, L] \times \mathbb{R},$$

où $\alpha = 0.01$ représente l'intensité de la perturbation. La période spatiale vaut $L = 4\pi$ et $v^{\max} = 6$ est la valeur de la vitesse au-dessus de laquelle on considère que la fonction de distribution est nulle (décroissance exponentielle en vitesse). Le pas de temps est $\Delta t = 1/8$ et N_{maille} représente le nombre de triangles du maillage. Le temps final vaut $T = 50\omega_p^{-1}$.

Les figures 3.8 montrent la comparaison de l'évolution du premier mode ($k = 0.5$) du champ électrique pour différents opérateurs d'interpolation. Ici le nombre de triangle est de 3906 (~ 32 points en x par 64 points en v) et on n'impose ni la conservation de la masse ni la positivité de la solution. L'amplitude du premier mode $E(k = 0.5, t)$ décroît exponentiellement comme la théorie le prédit. Le taux d'amortissement et la fréquence des oscillations obtenus par ces méthodes sont respectivement $\gamma = 0.153$ et $\omega = 1.415$, ce qui est en accord avec la théorie qui prédit les valeurs $\gamma = 0.1533$ et $\omega = 1.4156$. Pour ce cas test physique on observe des différences entre les différentes méthodes en temps long. Les schémas qui approchent le mieux le taux d'amortissement en temps long sont ceux qui utilisent une reconstruction \mathcal{C}^1 et le moins satisfaisant est le schéma de Lagrange d'ordre deux. Ceci semble logique car l'amortissement Landau s'obtient en prenant le gradient de la fonction de distribution à la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$. Aussi les opérateurs d'interpolation faisant intervenir les gradients de la fonction de distribution donneront une reconstruction plus proche de la solution exacte. Sur les

figures 3.10 (a), on observe que l'effet de récurrence (cf [144, 151]), apparait au temps $T_R = 33.49$, qui correspond à la valeur théorique prédite pour l'équation du transport libre (c'est-à-dire sans champ électrique) puisque $T_R = 2\pi/(k\Delta v)$. Bien qu'on n'impose aucune conservation, la fonction de distribution reste positive et les variations de la norme d'erreur relative pour l'entropie cinétique, la masse, la norme L^1 et l'énergie totale restent inférieure à 10^{-5} . Les figures 3.10 et 3.9 comparent pour différents maillages l'efficacité des opérateurs d'interpolation, l'imposition de la positivité et la conservation de la masse sur le premier mode. Les opérateurs NC1 et HCT-C donnent des résultats similaires. Dans le cas conservatif (la masse est conservée à 10^{-8} près) on observe que l'évolution du premier mode en temps long est moins précise mais lorsqu'on raffine le maillage l'approximation de la solution est améliorée, ce qui semble prouver que numériquement le schéma converge. Dans le cas conservatif (aussi positif) Fig 3.9, la perte de précision survient au même moment pour notre schéma et le schéma FCT ou PPM (voir [6]) pour la même discrétisation (3906 triangles $\sim 32 \times 64$ points). Les méthodes FB et CIP donnent une meilleure précision pour une même discrétisation (voir [151, 6]) en temps long parce qu'elles ne préservent pas la positivité de la fonction de distribution alors que les autres oui. Imposer la positivité détériore la précision et introduit de la diffusion. Cependant dans le cas non conservatif notre méthode et les méthodes FB et CIP sont comparables.

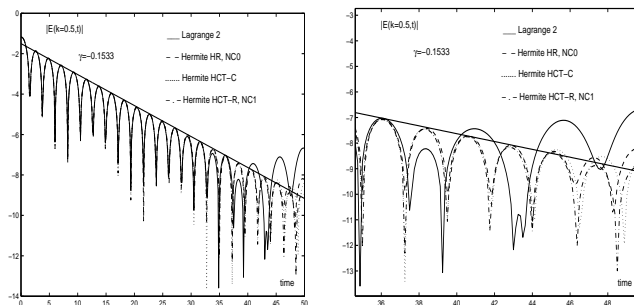


FIG. 3.8 – Comparaison des opérateurs d'interpolation sur l'évolution du premier mode $E(k = 0.5, t)$ du champ électrique pour l'amortissement Landau linéaire. $N_{maille} = 3906$.

3.7.2 L'amortissement Landau non linéaire

La condition initiale est

$$f(0, x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2)(1 + \alpha \cos(kx)), \quad \forall (x, v) \in [0, L] \times \mathbb{R},$$

où l'amplitude de la perturbation initiale de la densité, $\alpha = 0.5$, est plus grande. On prend $L = 4\pi$, $k = 0.5$, $\Delta t = 1/8$ et $v^{\max} = 6$. Le nombre de mailles N_{maille} , est de 3906. Le champ électrique introduit une forte modulation de la densité de charge. La théorie de l'amortissement Landau linéaire ne peut plus

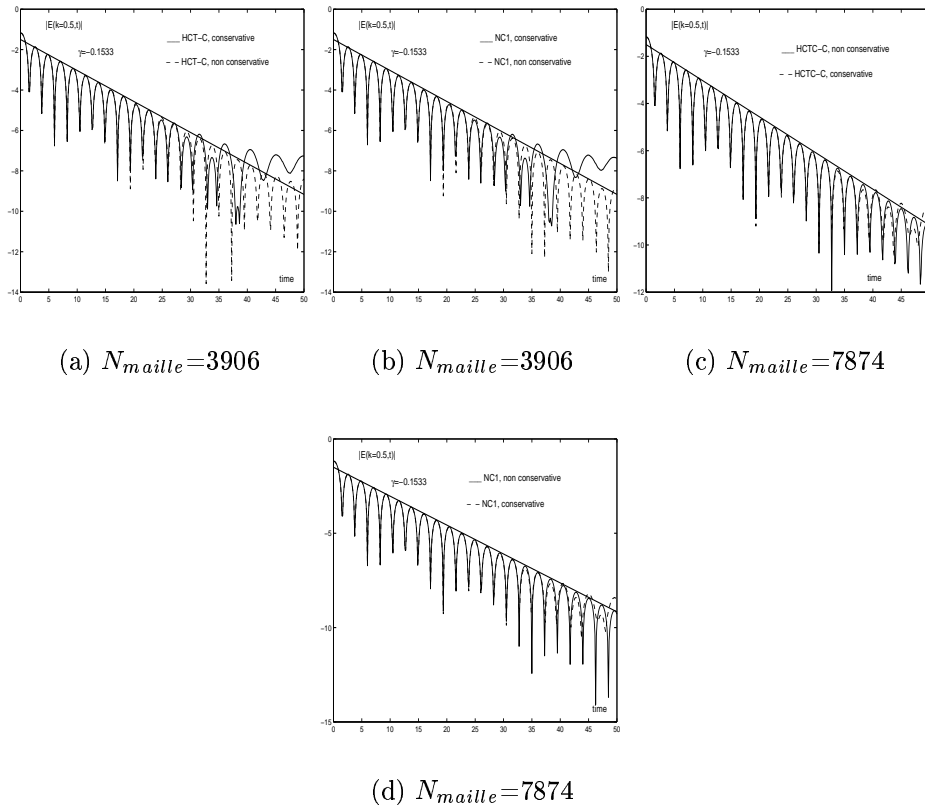


FIG. 3.9 – Evolution du premier mode $E(k = 0.5, t)$ du champ électrique pour l'amortissement Landau linéaire.

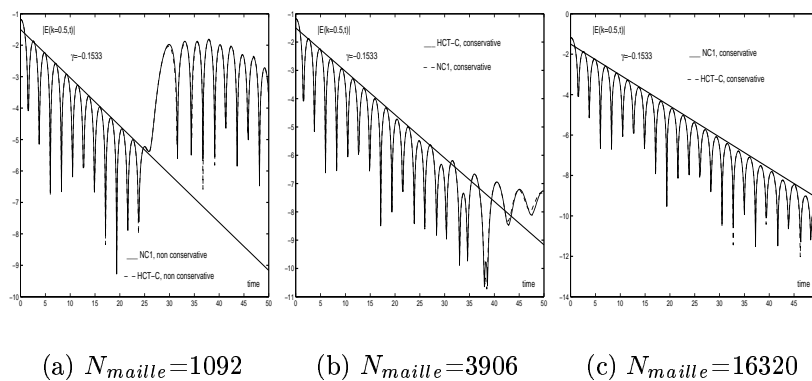


FIG. 3.10 – Evolution du premier mode $E(k = 0.5, t)$ du champ électrique pour l'amortissement Landau linéaire.

s'appliquer, car les effets non linéaires deviennent importants et ne peuvent plus être négligés. Ce cas test a été étudié par plusieurs auteurs ([128], [87], [144], [151], [48]). Les résultats observés sont en accord avec ceux que l'on trouve dans la littérature. L'amplitude du premier mode décroît exponentiellement dans un premier temps et oscille périodiquement autour d'une constante dans un second temps (cf figs 3.14, 3.14). D'abord le champ électrique cède de l'énergie aux particules, c'est pourquoi on observe une décroissance du premier mode qui véhicule la plus grande partie de l'énergie électrique. Après le mélange des conditions initiales, et les phénomènes transitoires dus aux fortes non linéarités, les particules dont l'énergie cinétique est plus petite que l'énergie potentielle sont piégées par le champ électrostatique autour de la vitesse de phase $v_\phi = \omega/k$, où apparaissent des trous (cf fig 3.16). Les électrons piégés oscillent dans le potentiel de l'onde avec une fréquence de rebondissement qui est la fréquence de l'enveloppe du premier mode (voir [65], [46], [114], [139]). Quand l'algorithme est non conservatif on observe (Fig. 3.11, 3.12) qu'avec l'interpolation de Lagrange d'ordre deux, la conservation de la norme L^1 est meilleure en temps court mais le schéma est trop dissipatif (perte importante de la norme L^2 et de l'entropie). L'interpolation de type Hermite de classe \mathcal{C}^1 (HCT-C, HCT-R, NC1) donne de bons résultats qui sont similaires voire même meilleurs en terme de conservation de norme L^1 que les résultats obtenus par les splines cubiques sur des grilles cartésiennes (voir [87]). On observe que la perte de la norme L^1 reste inférieure à 1.16% (6% pour les splines cubiques sur une grille pour une discrétisation équivalente, voir [87]) durant la phase transitoire (fortes variations de la fonction de distribution causées par les effets non linéaires) qui se réduit en temps long à une erreur relative d'ordre 10^{-3} . On observe une perte de norme L^2 de 10% et une croissance de 16% qui se stabilise en temps long. Sur un processeur Compaq Sierra Alphaserveur ES45 1Ghz, pour 100 itérations et 3906 triangles dans le cas conservatif (~ 32 points en x par 64 points en v) les temps de calcul sont les suivants : HCT-C, 16.12s; HCT-R, 6.11s; NC1, 6.30s. Parmi les opérateurs d'interpolation de classe \mathcal{C}^1 les meilleurs en terme de conservation L^1 sont HCT-R et NC1, et en terme de conservation L^2 (le moins diffusif) HCT-C. Au contraire l'interpolation de Lagrange d'ordre deux est deux fois plus diffuse. La version conservative de l'algorithme ne change pas les résultats décrits précédemment excepté que maintenant la solution est positive, conserve la masse (aussi la norme L^1) et le principe du maximum. Ces conservations sont utiles en temps long parce que des oscillations numériques peuvent se développer lorsque les phénomènes non linéaires sont dominants. En effet si on ne cherche pas à stabiliser ou contrôler la croissance des oscillations certains schémas peuvent devenir instables et exploser. C'est par exemple le cas du schéma d'interpolation de Lagrange d'ordre trois ou plus si on applique la version non conservative de l'algorithme. Par ailleurs la décroissance de l'entropie et de la norme L^2 est associée au fait que la fonction de distribution est filtrée ou régularisée lorsque les filaments deviennent plus petits que la taille des mailles. En effet dans une méthode semi-lagrangienne la projection sur le maillage implique que l'on résout l'équation de Vlasov à l'échelle de la taille des mailles de l'espace des phases. Aussi, les développements des structures microscopiques ne sont pas pris en compte par le schéma numérique et les phé-

nomènes physiques de hautes fréquences ne sont pas reproduits. La projection sur le maillage joue le rôle d'un filtre passe-bas.

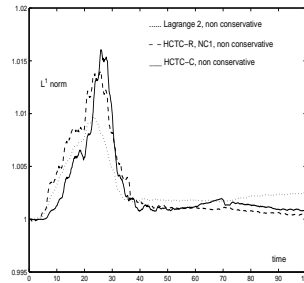


FIG. 3.11 – Evolution de la norme L^1 pour l'amortissement Landau non linéaire. $N_{maille} = 3906$.

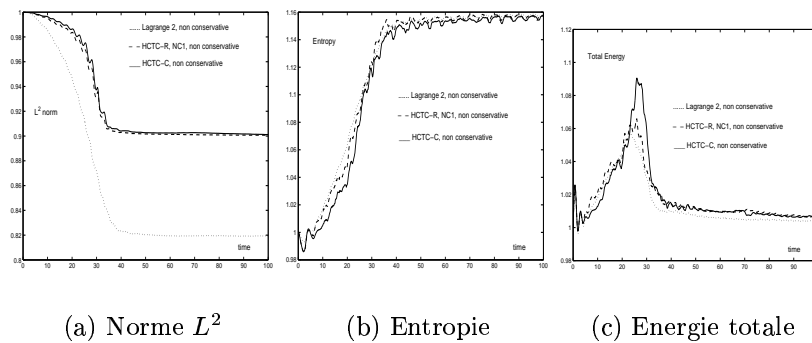


FIG. 3.12 – Evolution de la norme L^2 , l'entropie et l'énergie totale pour l'amortissement Landau non linéaire dans le cas non conservatif. $N_{maille} = 3906$

3.7.3 L'instabilité double faisceaux

La condition initiale est

$$f(0, x, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} v^2 \exp(-v^2/2)(1 + \alpha \cos(kx)), \quad \forall (x, v) \in [0, L] \times \mathbb{R},$$

où $\alpha = 0.05$, $L = 4\pi$ et $v^{\max} = 6$. Le pas de temps Δt est égal à $1/8$ et $N_{maillage} = 3096$. Le temps final T vaut $100\omega_p^{-1}$.

Les figures 3.23 montrent l'évolution de la fonction de distribution dans l'espace des phases. Au temps $t \cong 10$, on observe la formation d'un vortex qui est associée au piégeage des particules. De $t \cong 10$ jusqu'à $t \cong 20$, l'instabilité croît rapidement et un trou se forme. Après $t \cong 20$ les particules piégées oscillent dans le potentiel électrostatique de l'onde et le vortex tourne périodiquement. Les figures 3.20 et 3.21 illustrent l'évolution des deux premiers modes

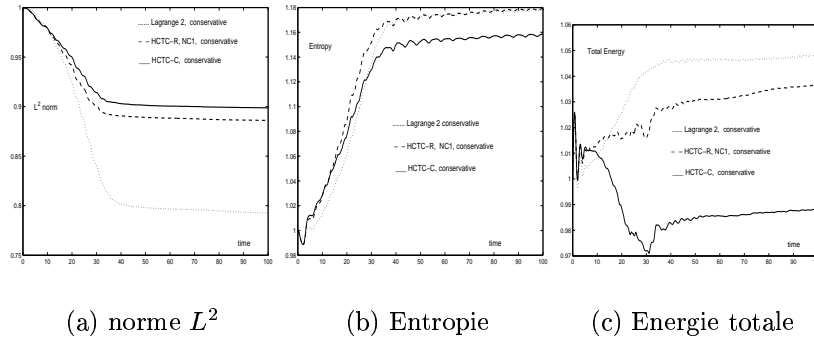


FIG. 3.13 – Evolution de la norme L^2 , l'entropie et l'énergie totale pour l'amortissement Landau non linéaire dans le cas conservatif. $N_{maille} = 3906$

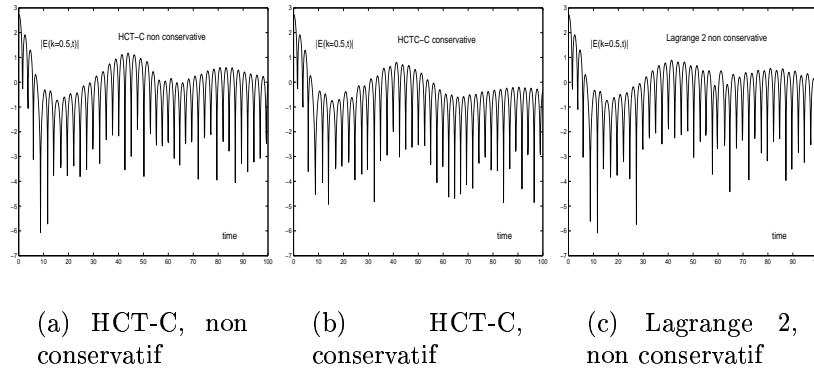


FIG. 3.14 – Evolution du premier mode $E(k = 0.5, t)$ du champ électrique pour l'amortissement Landau non linéaire. $N_{maille} = 3906$

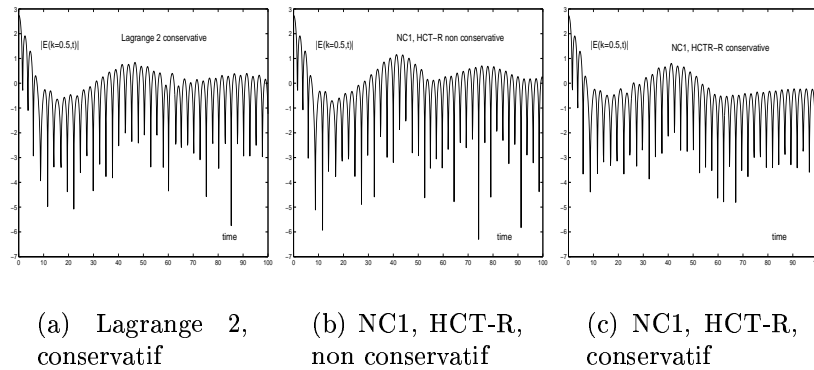


FIG. 3.15 – Evolution du premier mode $E(k = 0.5, t)$ du champ électrique pour l'amortissement Landau non linéaire. $N_{maille} = 3906$

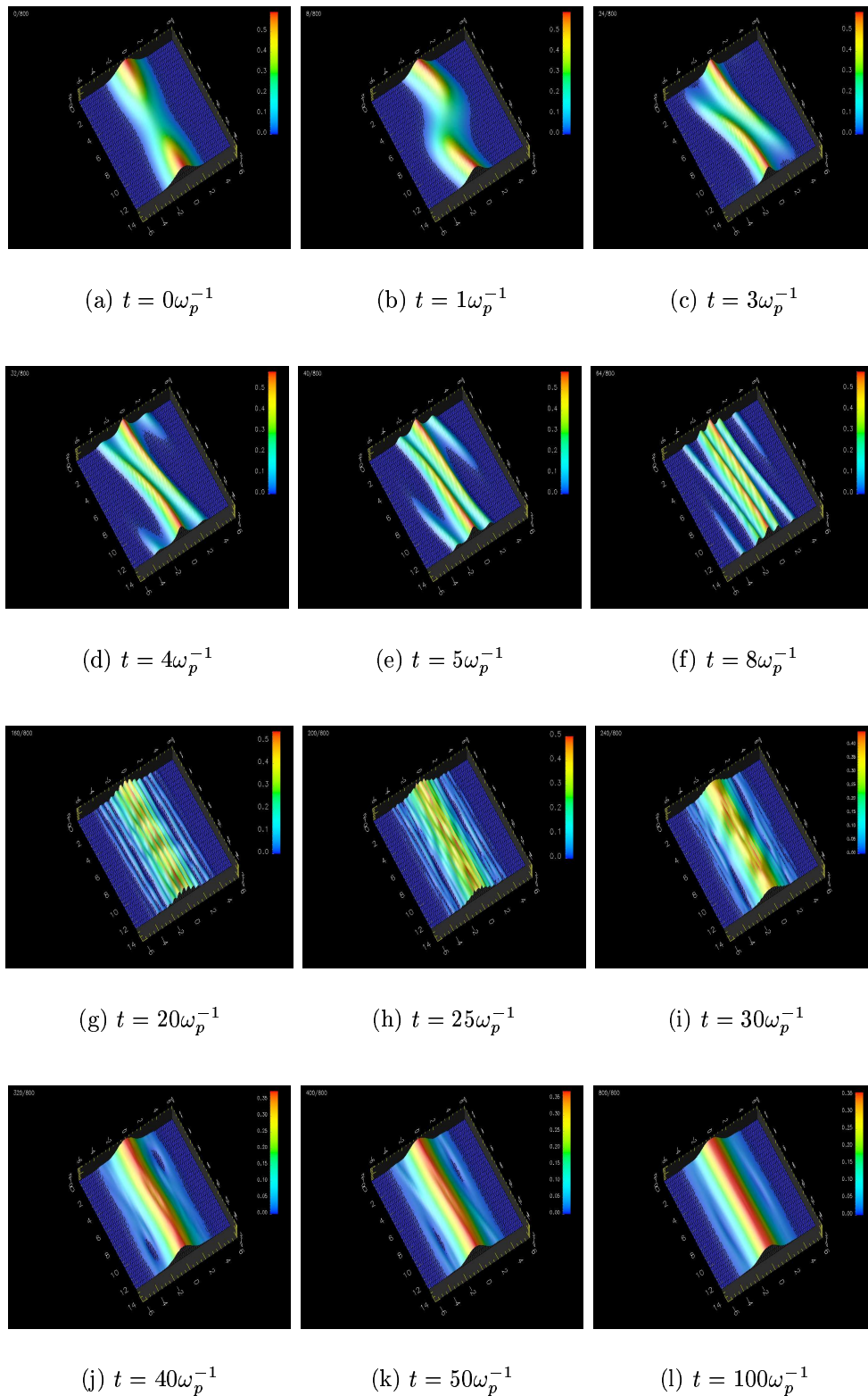


FIG. 3.16 – Evolution de la fonction de distribution f dans l'espace des phases pour le schéma NC1 conservatif $N_{maille} = 3906$, dans le cas de l'amortissement Landau non linéaire.

$E(k = 0.5, t)$ et $E(k = 1, t)$ selon différents opérateurs d'interpolation dans le cas conservatif ou non conservatif. Après une phase transitoire le premier mode $E(k = 0.5, t)$ augmente exponentiellement pour atteindre un maximum au temps $t \cong 18$, puis il sature et oscille très légèrement, à cause des particules piégées. L'autre $E(k = 1, t)$ croît exponentiellement et oscille mais il reste toujours inférieur au premier mode. L'énergie du champ électrique augmente rapidement de $t \cong 10$ à $t \cong 20$, et oscille périodiquement.

On note que le schéma de Lagrange d'ordre deux devient mauvais (trop diffusif) en temps long lorsqu'on n'impose pas le principe du maximum ni la conservation de la masse (cf figs 3.17, 3.18, 3.19). Dans le cas du schéma avec interpolation de Lagrange d'ordre deux et conservatif les résultats sont meilleurs même s'il reste plus dissipatif que les autres schémas. Les schémas d'Hermite de classes \mathcal{C}^1 (NC1, HCT-R, HCT-C) donnent de bons résultats. Cependant on observe que le schéma HCT-C est meilleur en terme de conservation d'entropie, de norme L^2 et d'énergie (cf figs 3.17, 3.18, 3.19). Par ailleurs, on note que la filamentation se développe de $t \cong 15$ jusqu'à $t \cong 35$, et ensuite est lissée par diffusion numérique en temps long. Les mêmes phénomènes numériques de filtrage, expliqués plus haut pour l'amortissement Landau linéaire ont encore lieu.

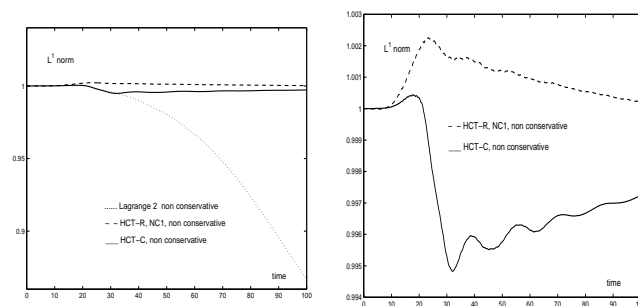


FIG. 3.17 – Comparaison des opérateurs d'interpolation sur l'évolution de la norme L^1 avec le schéma non conservatif dans le cas de l'instabilité double faisceaux. $N_{maille} = 3906$.

3.8 Quelques perspectives

3.8.1 Méthodes *a posteriori* pour la conservation des invariants

Dans le paragraphe 3.6.4, on a mis en oeuvre une méthode *a posteriori*, simple et peu coûteuse, pour assurer la positivité et la conservation de la masse (et par conséquent de la norme L^1) de la fonction de distribution. Cependant l'équation de Vlasov conserve un grand nombre de quantités (physiques ou mathématiques), comme l'énergie, l'impulsion, l'entropie, et toutes les normes L^p . Aussi cette équation est difficile à simuler numériquement car elle est très "exigeante". On présente

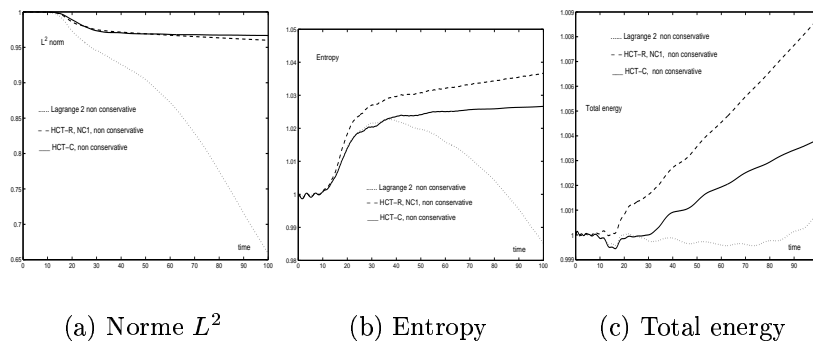


FIG. 3.18 – Evolution de la norme L^2 , l'entropie, et l'énergie totale, avec le schéma non conservatif dans le cas de l'instabilité double faisceaux. $N_{maille} = 3906$

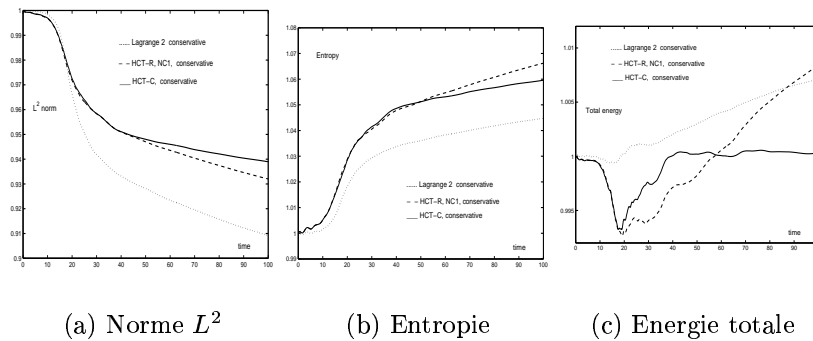


FIG. 3.19 – Evolution de la norme L^2 , l'entropie et l'énergie totale, avec le schéma non conservatif dans le cas de l'instabilité double faisceaux. $N_{maille} = 3906$

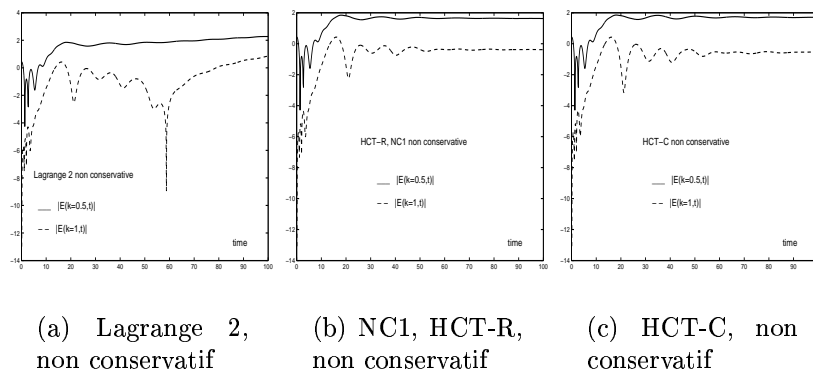


FIG. 3.20 – Evolution des deux premiers modes $E(k = 0.5, t)$ et $E(k = 1, t)$ du champ électrique avec le schéma non conservatif dans le cas de l'instabilité double faisceaux. $N_{maille} = 3906$

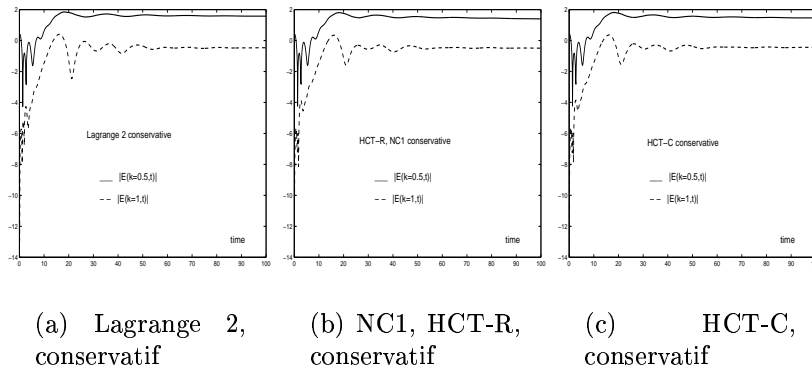


FIG. 3.21 – Evolution des deux premiers modes $E(k = 0.5, t)$ et $E(k = 1, t)$ du champ électrique avec l’algorithme conservatif dans le cas de l’instabilité double faisceaux. $N_{maille} = 3906$

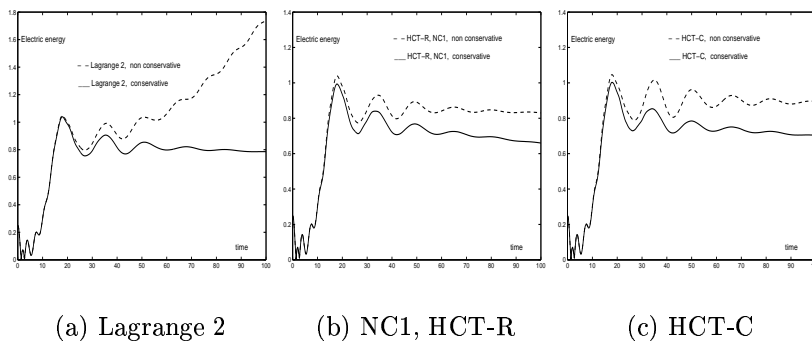


FIG. 3.22 – Comparaison de l’évolution de l’énergie électrique dans le cas de l’instabilité double faisceaux. $N_{maille} = 3906$

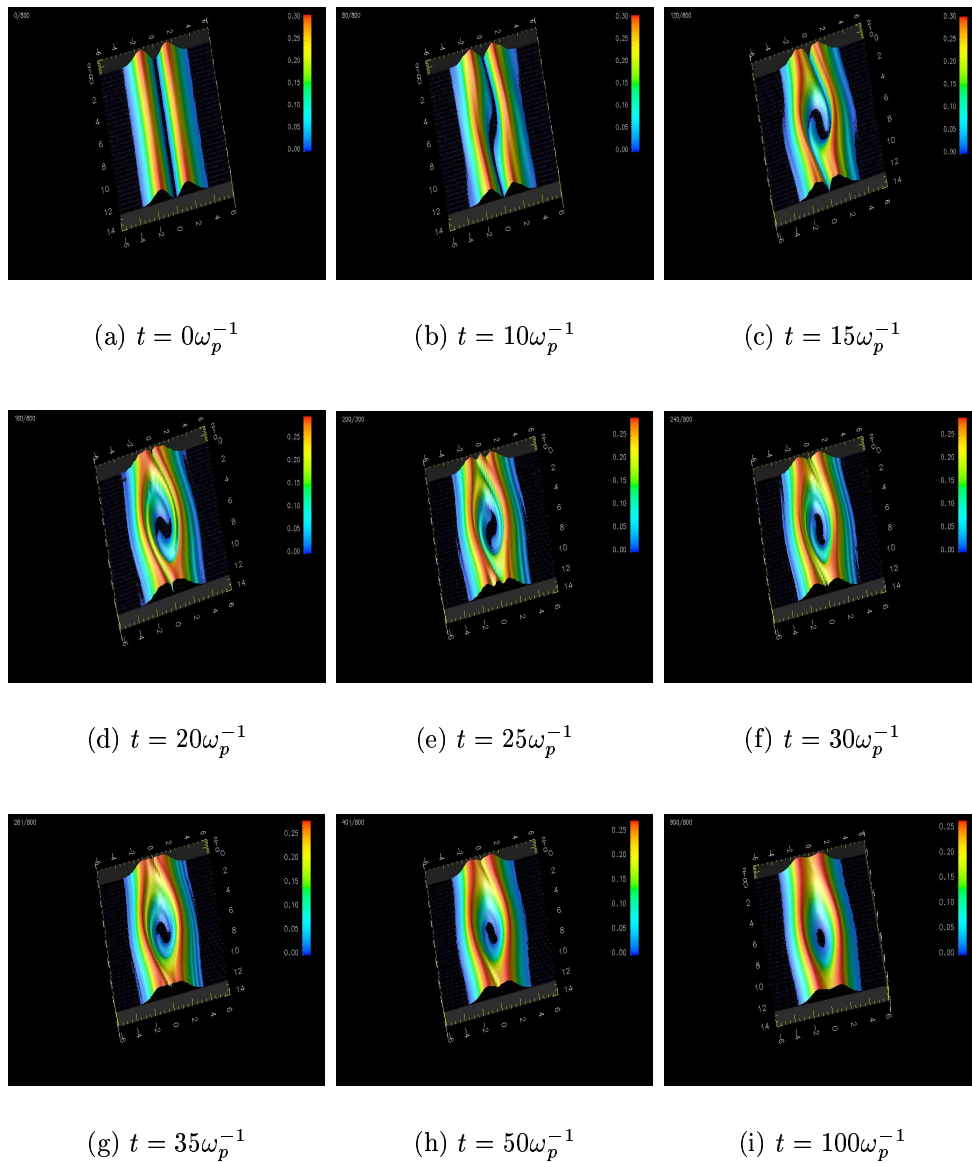


FIG. 3.23 – Evolution de la fonction de distribution f dans l'espace des phases, avec le schéma conservatif NC1 et $N_{maille} = 16320$, dans le cas de l'instabilité double faisceaux.

ici un cadre général pour développer des méthodes *a posteriori*, permettant d'assurer la conservation d'un certains nombre de quantités. On commence d'abord par donner une version discrète des différentes quantités conservées. En reprenant les notations du paragraphe 3.6.4 on a

- la norme L^1

$$\begin{aligned}
\|f_h\|_{L_h^1} &= \sum_k |f_{h,k}| \mathcal{A}_k \\
&= \sum_k f_{h,k} \mathcal{A}_k \\
&= \sum_k (1 - \gamma_k^*) f_{L_h,k} \mathcal{A}_k + \gamma_k^* f_{H_h,k} \mathcal{A}_k \\
&= \sum_k \gamma_k^* \xi_k + f_{L_h,k} \mathcal{A}_k \\
&= \sum_k \gamma_k^* \xi_k + l_k \\
&= \|f_h^0\|_{L_h^1},
\end{aligned}$$

- la norme L^p , $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}
\|f_h\|_{L_h^p}^p &= \sum_k |f_{h,k}|^p \mathcal{A}_k \\
&= \sum_k f_{h,k}^p \mathcal{A}_k \\
&= \sum_k (\gamma_k^* (f_{H_h,k} - f_{L_h,k}) + f_{L_h,k})^p \mathcal{A}_k \\
&= \sum_k \sum_{q=0}^p C_p^q \gamma_k^{*q} \frac{\xi_k^q}{l_k} l_k^p \mathcal{A}_k^{1-p} \\
&= \|f_h^0\|_{L_h^p}^p,
\end{aligned}$$

- les moments d'ordre m , $m = 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_h^m(f_h) &= \sum_k f_{h,k} v_k^m \mathcal{A}_k \\
&= \sum_k \gamma_k^* \xi_k v_k^m + l_k v_k^m \\
&= \mathcal{M}_h^m(f_h^0),
\end{aligned}$$

- l'énergie totale

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_h(f_h) &= \sum_k \gamma_k^* \xi_k v_k^2 + l_k v_k^2 + |E(x_k)|^2 \Delta x_k \\
&= \mathcal{E}_h(f_h^0),
\end{aligned}$$

- l'entropie

$$\begin{aligned}
S_h(f_h) &= \sum_k f_{h,k} \log(f_{h,k}) A_k \\
&= \sum_k (\gamma_k^*(f_{H_h,k} - f_{L_h,k}) + f_{L_h,k}) \log(\gamma_k^*(f_{H_h,k} - f_{L_h,k}) + f_{L_h,k}) \\
&= S_h(f_h^0),
\end{aligned}$$

On désigne par \mathcal{EQC} l'ensemble défini comme il suit

$$\begin{aligned}
\mathcal{EQC} &= \{\mathcal{QC}_i(\cdot)\}_{i \in \mathbb{N}} \\
&= \left\{ \|\cdot\|_{L_h^p}, \quad 1 \leq p \leq \infty; \quad \mathcal{E}_h; \quad S_h(\cdot); \quad \mathcal{M}_h^m(\cdot), \quad m = 1; \right\}
\end{aligned}$$

La méthode *a posteriori* consiste en fait à résoudre un problème d'optimisation avec contraintes qui peut selon les quantités que l'on souhaite conserver devenir un problème d'optimisation non linéaire ou linéaire.

Soit $\mathcal{J} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. On cherche à résoudre les problèmes de la forme :

$$\mathcal{P} \left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } \gamma^* \in \mathcal{S} \text{ tel que} \\ \mathcal{J}(\gamma^*) \leq \mathcal{J}(\gamma), \quad \forall \gamma \in \mathcal{S} \end{array} \right.$$

où $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^N$ ($\mathcal{S} \neq \emptyset$) est appelé "ensemble des contraintes" ou "ensemble des solutions admissibles", et qui est déterminé par des contraintes

1. d'inégalité

$$0 \leq \gamma_k \leq \gamma_k^{\max}$$

2. d'égalité

$$\mathcal{QC}_i(f_h) = \mathcal{QC}_i(f_h^0) \quad \forall i \in \mathcal{F}$$

où \mathcal{F} est un sous ensemble fini de \mathbb{N} .

Par exemple on obtient un problème d'optimisation non linéaire en prenant comme fonctionnelle à minimiser

$$\mathcal{J}(\gamma) = \left| \|f_h\|_{L_h^2} - \|f_h^0\|_{L_h^2} \right|^2$$

et comme contraintes

$$0 \leq \gamma \leq \gamma^{\max}$$

$$\|f_h\|_{L_h^1} = \|f_h^0\|_{L_h^1}$$

$$\mathcal{E}_h(f_h) = \mathcal{E}_h(f_h^0)$$

$$\mathcal{M}_h^1(f_h) = \mathcal{M}_h^1(f_h^0).$$

En supposant que le schéma fait décroître l'énergie on a par exemple un problème de programmation linéaire où la fonctionnelle linéaire à minimiser est

$$\mathcal{J}(\gamma) = \mathcal{E}_h(f_h^0) - \mathcal{E}_h(f_h)$$

et les contraintes linéaires d'égalités et d'inégalités sont

$$\begin{aligned} 0 &\leq \gamma \leq \gamma^{\max} \\ \|f_h\|_{L_h^1} &= \|f_h^0\|_{L_h^1} \\ \mathcal{M}_h^1(f_h) &= \mathcal{M}_h^1(f_h^0). \end{aligned}$$

Pour écrire le problème sous forme synthétique on introduit les notations suivantes :

Soit $g_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, p$ les contraintes d'inégalités et $h_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $\forall i = 1, \dots, q$ les contraintes d'égalités.

Avec la convention suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_j \end{pmatrix} \leq 0 \iff y_i \leq 0 \quad \forall i = 1, \dots, j$$

et en posant

$$g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad g(\gamma) = \begin{pmatrix} g_1(\gamma) \\ \vdots \\ g_p(\gamma) \end{pmatrix},$$

et

$$h : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^q, \quad h(\gamma) = \begin{pmatrix} h_1(\gamma) \\ \vdots \\ h_q(\gamma) \end{pmatrix}$$

on a

$$\mathcal{S} = \{\gamma \in \mathbb{R}^N; \quad g(\gamma) \leq 0; \quad h(\gamma) = 0\}$$

Par ailleurs on appelle contrainte active en un point $\gamma \in \mathcal{S}$ une contrainte g_i telle que $g_i(\gamma) = 0$. Les autres contraintes sont dites inactives. L'ensemble des indices i pour lesquels $g_i(\gamma) = 0$ est noté $I(\gamma)$. Par convention les contraintes d'égalité h_i sont considérées étant actives.

Enfin on définit le Lagrangien \mathcal{L} comme

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\gamma, \mu, \lambda) &\mapsto \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) = \mathcal{J}(\gamma) + g(\gamma) \cdot \mu + h(\gamma) \cdot \lambda \end{aligned}$$

et son gradient comme

$$\nabla \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) = \begin{pmatrix} \nabla_\gamma \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) = \nabla \mathcal{J}(\gamma) + Dg(\gamma)^T \mu + Dh(\gamma)^T \lambda \\ \nabla_\mu \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) = g(\gamma) \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) = h(\gamma) \end{pmatrix}$$

L'existence d'un minimum local ou global est donnée par les deux théorèmes suivants

Théorème 43 Soit $\gamma \in \mathcal{S}$. On suppose que \mathcal{J} , g et h sont deux fois différentiables au point γ .

i) (Condition nécessaire) Ici on suppose seulement que \mathcal{J} , g et h sont de classe \mathcal{C}^1 dans un voisinage de γ . En outre on suppose que la famille $\{\nabla h_i(\gamma), \quad i = 1, \dots, q, \quad \nabla g_i(\gamma), \quad i \in I(\gamma)\}$ est libre et que γ est un minimum local de \mathcal{J} sur \mathcal{S} . Alors il existe $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla_{\gamma} \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) = 0 \\ \nabla_{\mu} \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) \leq 0 \\ \nabla_{\lambda} \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) = 0 \\ g(\gamma) \cdot \mu = 0 \end{cases}$$

De plus si \mathcal{J} , g et h sont deux fois différentiables au point γ alors pour tout d dans l'espace tangent aux contraintes actives, c'est à dire

$$\{d \in \mathbb{R}^N; \quad \nabla h_i(\gamma) \cdot d = 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad \nabla g_i(\gamma) \cdot d = 0, \quad i \in I(\gamma)\}$$

on a

$$\nabla_{\gamma}^2 \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) d \cdot d \geq 0$$

ii) (Condition suffisante) S'il existe $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q$ tel que

a) $\nabla_{\gamma} \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) = 0$

b) $g(\gamma) \cdot \mu = 0$

c) $\nabla_{\gamma}^2 \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) d \cdot d > 0$ pour tout $d \neq 0$ dans

$$\{d \in \mathbb{R}^N; \quad \nabla h_i(\gamma) \cdot d = 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad \nabla g_i(\gamma) \cdot d = 0, \quad \text{si } i \in I(\gamma) \text{ et si } \mu_i > 0\},$$

alors γ est un minimum local strict de \mathcal{J} sur \mathcal{S} .

Les coefficients μ et λ sont appelés multiplicateurs de Lagrange. Les conditions

$$\begin{cases} \nabla_{\gamma} \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) = 0 \\ \mu \leq 0 \\ g(\gamma) \cdot \mu = 0 \end{cases}$$

sont appelées les conditions KKT (Karush, Kuhn, Tucher). Pour l'existence d'un minimum global on a le théorème suivant

Théorème 44 On suppose que les fonctions h_i sont affines et que les fonctions g_i sont convexes (ceci implique que \mathcal{S} est convexe). On suppose que la fonctionnelle \mathcal{J} est convexe. Soit $\gamma \in \mathcal{S}$ tel que $\nabla \mathcal{J}$ existe. S'il existe $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^q$ tel que

$$\begin{cases} \nabla_{\gamma} \mathcal{L}(\gamma, \mu, \lambda) = 0 \\ g(\gamma) \cdot \mu = 0 \end{cases}$$

alors γ est un minimum global de \mathcal{J} sur \mathcal{S} .

La résolution numérique des problèmes d'optimisation linéaires et non linéaires a fait l'objet de nombreuses études. Pour la résolution d'un problème de programmation linéaire on peut citer l'algorithme du simplexe. Pour résoudre les problèmes d'optimisation non linéaires il existe une batterie de méthodes comme la méthode de projection, la méthode des surfaces actives, les méthodes de pénalisation (extérieure, intérieure), les méthodes de relaxation, les méthodes de gradient, la méthode SQP (Sequential Quadratic Programming) et la méthode d'Uzawa. Pour une description de ces méthodes on renvoie le lecteur aux références [108], [49], [113], [142] et [148].

Une autre méthode très intéressante, appelée BIM (Bayliss-Isaacson Method), basée sur la linéarisation des contraintes permet d'assurer la conservation de certaines quantités physiques. Les ingrédients de cette méthode se trouvent dans [153] et [154] (voir aussi les références incluses).

3.8.2 Autres reconstructions

Bien que nous n'ayons pas eu le temps d'essayer ce type de méthodes, les reconstructions ENO (Essentially Non-Oscillatory) et WENO (Weighted Essentially Non-Oscillatory) sur des maillages triangulaires, utilisées pour résoudre les systèmes de lois de conservation hyperboliques (cf [13, 47, 1, 2]), semblent être une voie intéressante pour la simulation de l'équation de Vlasov.

3.8.3 Propagation des dérivées d'ordre supérieur

On peut généraliser la méthode avec propagation de gradient, en propageant des dérivées partielles d'ordre supérieur. Par exemple, à partir des dérivées partielles d'ordre deux de la fonction de distribution on pourrait utiliser les éléments d'Argyris, Bell, Birkhoff-Mansfield, etc ... (cf [49]). Les équations de transport pour les dérivées partielles d'ordre supérieur s'obtiennent en dérivant autant de fois que cela est nécessaire l'équation de Vlasov. Si cette extension semble évidente, elle conduit à traiter un volume de données gigantesque qui la rend pratiquement peu utilisable en plusieurs dimensions dans l'espace des phases pour les calculateurs actuels.

3.8.4 Méthodes sans maillage

On pourrait envisager d'utiliser les techniques d'interpolation par fonctions radiales, qui sont un outil moderne et puissant pour l'interpolation de données multi-dimensionnelles irrégulièrement réparties. Avant d'en discuter les avantages décrivons brièvement ces techniques. Soit \mathcal{D} un ensemble de points de \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. \mathcal{D} représente l'ensemble des points de l'espace des phases sur lesquels on discrétise la fonction de distribution f . Soit $\mathcal{S}(x)$ un sous ensemble de \mathcal{D} de cardinal n , contenant les n premiers "voisins" de x . On peut par exemple utiliser la distance Euclidienne dans \mathbb{R}^d pour déterminer les n premiers voisins de x . On peut alors

déterminer l'interpolant $\pi_{\phi, \mathcal{S}} f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme

$$\pi_{\phi, \mathcal{S}} f(t, \cdot) = \sum_{x \in \mathcal{S}} \gamma_x \varphi(\|\cdot - x\|) + p(\cdot)$$

et tel que

$$f(t, \cdot)|_{\mathcal{S}} = \pi_{\phi, \mathcal{S}} f(t, \cdot)|_{\mathcal{S}}.$$

$\|\cdot\|$, désigne la norme Euclidienne dans \mathbb{R}^d , et p est un élément de P_m^d , l'espace vectoriel linéaire des polynômes à d variables de degré inférieur à m . Supposons que p_1, \dots, p_r est une base de P_m^d avec $r = C_{m-1+d}^d$, et $n \geq r$, alors les contraintes d'interpolation impliquent que les coefficients (qui déterminent $\pi_{\phi, \mathcal{S}} f$) $(\gamma^T, \mu^T) \in \mathbb{R}^{n+r}$ où $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)^T$ et $\gamma = \{\gamma_x\}_{x \in \mathcal{S}}$, sont solutions du système linéaire

$$\begin{pmatrix} K_{\phi, \mathcal{S}} & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

où

$$K_{\phi, \mathcal{S}} = (\varphi(\|x - y\|))_{y, x \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad P = (p_l(x))_{x \in \mathcal{S}, 1 \leq l \leq r} \in \mathbb{R}^{n \times q},$$

et

$$F = (f(t, x))_{x \in \mathcal{S}} \in \mathbb{R}^n.$$

Pour plus de détails sur la façon dont peut résoudre le système linéaire (3.20) on peut consulter [192]. Il existe plusieurs types de fonctions radiales :

- ★ Splines plaques minces : $\varphi(\|x\|) = \|x\|^2 \log(\|x\|)$, qui minimise la semi-norme $H^2(\mathbb{R}^2)$ (qui n'est autre que la courbure de la surface générée par $\pi_{\phi, \mathcal{S}}$) sous contraintes d'interpolation
- ★ Splines polyharmoniques :

$$\varphi(\|x\|) = \begin{cases} \|x\|^{\alpha-d} & \text{si } \alpha - d \in (0, \infty) \setminus 2\mathbb{N} \\ \|x\|^{\alpha-d} \log(\|x\|) & \text{si } \alpha - d \in 2\mathbb{N} \end{cases}$$

qui minimise les semi-normes $H^m(\mathbb{R}^d)$ sous contraintes d'interpolation

- ★ Noyau Gaussien :

$$\varphi(\|x\|) = \exp(-\|x\|^2/4)$$

- ★ Multiquadrique généralisés :

$$\varphi(\|x\|) = \begin{cases} (1 + \|x\|^2)^{(\alpha-d)/2} & \\ \text{si } \alpha - d \in (-d, \infty) \setminus 2\mathbb{Z}_+; & \\ (1 + \|x\|^2)^{(\alpha-d)/2} \log(1 + \|x\|^2) & \\ \text{si } \alpha - d \in 2\mathbb{Z}_+ & \end{cases}$$

Pour chaque fonction radiale citée ci-dessus, le système linéaire (3.20) fournit une unique solution à condition que l'ensemble \mathcal{S} soit non P_m^s -dégénéré, c'est-à-dire que la condition suivante soit satisfaite

$$p(x) = 0, \quad \forall x \in \mathcal{S} \implies p \equiv 0 \quad (3.21)$$

La contrainte (3.21) est assez faible. Par exemple pour $m = 2$ elle signifie que les points de \mathcal{S} ne doivent pas être alignés. L'interpolation par fonctions radiales consiste donc à résoudre des petits systèmes linéaires locaux. De plus l'interpolant est de classe \mathcal{C}^∞ et possède de bonnes propriétés de stabilité puisque il est solution d'un problème de minimisation (du moins pour les splines plaques minces et polyharmoniques). L'avantage majeur de telles méthodes est que l'on n'a plus besoin de maillage de l'espace des phases car l'interpolant ne dépend que de φ et de la distance inter-points. Finalement la dimension de l'espace des phases n'est plus un problème. L'interpolation par fonctions radiales fut d'abord initiée par Duchon ([74, 75, 76]) qui découvrit les splines "plaques minces". Ensuite elle fut développée par de nombreux auteurs comme M.J.D Powell ([167, 168, 169]), N. Dyn ([77, 78]) et R. Schaback ([181, 182, 183]) entre autres ([123, 123, 192, 206, 211]).

Chapitre 4

Méthodes numériques pour l'équation de Vlasov axisymétrique

Sommaire

4.1	Le modèle paraxial	176
4.2	L'équation de Vlasov axisymétrique	178
4.3	Solutions stationnaires	181
4.3.1	La distribution K-V (Kapchinsky-Vladimirsky)	183
4.3.2	La distribution de Maxwell-Boltzmann	184
4.4	Discrétisation de l'équation de Vlasov axisymétrique.	186
4.5	La focalisation	188
4.6	Résultats numériques.	190
4.6.1	Faisceau semi-Gaussien	190
4.6.2	Le faisceau de Maxwell-Boltzmann	190
4.6.3	Faisceau Gaussien	193
4.7	Conclusions	193

4.1 Le modèle paraxial

L'équation de Vlasov axisymétrique peut se déduire du modèle paraxial (cf [63, 89]). En effet on considère un faisceau de particules chargées, où chaque particule a la même charge q et la même masse m . On suppose que les particules sont non relativistes de telle sorte que la fonction de distribution $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ satisfait l'équation de Vlasov stationnaire non relativiste

$$\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0,$$

où $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ et \mathbf{F} est la force de Lorentz donnée par

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

où le champ électrique $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ et le champ magnétique $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x})$ vérifient les équations de Maxwell stationnaire

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\Phi, \\ -\Delta\Phi &= \frac{1}{\varepsilon_0}\rho, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

où $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$ est le potentiel électrostatique, $\rho(\mathbf{x})$ et $\mathbf{j}(\mathbf{x})$ sont respectivement la densité de charge et la densité de courant définies par

$$\rho(\mathbf{x}) = q \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}) = q \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

On suppose que l'axe optique du faisceau est une ligne droite confondue avec l'axe z , et on définit la vitesse longitudinale moyenne $u_z = u_z(\mathbf{x})$ du faisceau par

$$u_z(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) v_z d\mathbf{v}}{\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}}.$$

Les hypothèses du modèle paraxial sont les suivantes

- ★ Les particules restent près de l'axe optique.
- ★ Les vitesses transverses (v_x, v_y) des particules et les déviations $v_z - u_z$ de la vitesse moyenne u_z restent faibles devant la vitesse de la lumière c .

Si on développe la fonction de distribution et les champs électromagnétiques selon le petit paramètre $\eta = l/L$, où l est l'échelle de longueur dans le plan transverse et L l'échelle de longueur dans le plan longitudinal, alors le modèle paraxial, obtenu en conservant les termes du premier ordre en η du développement asymptotique, est une approximation d'ordre un du modèle Vlasov-Maxwell stationnaire (pour plus détail voir [63]).

Dans la suite de ce chapitre on utilisera les notations suivantes

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{v}_{\mathbf{r}} = (v_x, v_y), \quad \mathbf{B} = (\mathbf{B}_{\mathbf{r}}, B_z), \quad \mathbf{E} = (\mathbf{E}_{\mathbf{r}}, E_z),$$

$$\mathbf{E}_r = (E_x, E_y), \quad \mathbf{B}_r = (B_x, B_y), \quad \nabla_r = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \nabla_{\mathbf{v}_r} = \left(\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y} \right),$$

Avec les notations précédentes le modèle consiste alors à trouver les fonctions

$$f = f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r, z), \quad \Phi(\mathbf{r}, z), \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{B}_r(\mathbf{r}, z) \quad \text{et} \quad u_z = u_z(z),$$

solutions des équations

$$u_z \frac{du_z}{dz} = \frac{q}{m} E_z, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(u_z f) + \mathbf{v}_r \cdot \nabla_r f + \frac{1}{m} \mathbf{F}_r \cdot \nabla_{\mathbf{v}_r} f = 0, \quad (4.2)$$

$$-\Delta_r \Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} n - \frac{dE_z}{dz}, \quad n = \int f d\mathbf{v}_r, \quad (4.3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 q n u_z \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{dB_z}{dz}, \end{cases} \quad (4.4)$$

où le champ de force est donné par

$$\begin{cases} F_x = q \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} - u_z B_y + v_y B_z \right) \\ F_y = q \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} + u_z B_x - v_x B_z \right) \end{cases} \quad (4.5)$$

avec les conditions aux limites

$$u_z(0) = u_{z0}, \quad f(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r, 0) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}_r).$$

Notons que E_z et B_z sont des champs extérieurs. En effet les seconds membres des équations des termes du premier ordre des champs électromagnétiques sont des termes d'ordre zéro du champ électromagnétique qui, eux mêmes, vérifient le système de Maxwell stationnaire sans charge d'espace ni courant. Par conséquent il s'agit bien de champs extérieurs (cf [63]). Comme les équations de Maxwell sont linéaires on peut décomposer les champs transverses en leur partie auto-consistante et extérieure (appliquée),

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_r^e + \mathbf{E}_r^s, \quad \mathbf{B}_r = \mathbf{B}_r^e + \mathbf{B}_r^s,$$

dérivant d'un potentiel, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{E}_r^e = \nabla_r \Phi^e, \quad \mathbf{B}_r^e = -\nabla_r \chi^e \\ \mathbf{E}_r^s = \nabla_r \Phi^s, \quad \mathbf{B}_r^s = \mathbf{rot} \chi^s = \left(\frac{\partial \chi^s}{\partial y}, -\frac{\partial \chi^s}{\partial x} \right), \end{cases} \quad (4.6)$$

où les potentiels extérieurs $\Phi^e = \Phi^e(\mathbf{r}, z)$ et $\chi^e = \chi^e(\mathbf{r}, z)$ satisfont

$$-\Delta_{\mathbf{r}}\Phi^e = -\frac{dE_z}{dz} \quad (4.7)$$

$$-\Delta_{\mathbf{r}}\chi^e = -\frac{dB_z}{dz} \quad (4.8)$$

et les potentiels auto-consistants $\Phi^s = \Phi^s(\mathbf{r}, z)$ et $\chi^s = \chi^s(\mathbf{r}, z)$ vérifient

$$-\Delta_{\mathbf{r}}\Phi^s = \frac{q}{\varepsilon_0}n \quad (4.9)$$

$$-\Delta_{\mathbf{r}}\chi^s = \mu_0 q n u_z. \quad (4.10)$$

4.2 L'équation de Vlasov axisymétrique

Ici on suppose que les grandeurs physiques ($f, \mathbf{E}_{\mathbf{r}}^e, \dots$) sont invariantes par rotation. On note (r, θ, z) , $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, les coordonnées cylindriques et par (v_r, v_θ) les composantes radiales et orthoradiales (azimuthales) de la vitesse transverse $\mathbf{v}_{\mathbf{r}}$. Alors on a la transformation

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

L'invariance par rotation implique que toutes les grandeurs physiques sont indépendantes de θ . Pour tout potentiel de la forme $\Phi = \Phi(\mathbf{r}, z)$ on a

$$\Delta_{\mathbf{r}}\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right).$$

De plus on suppose que la vitesse moyenne u_z de propagation du faisceau est constante. D'après (4.1) on a $E_z = 0$ et à partir de (4.7) on obtient

$$-\Delta_{\mathbf{r}}\Phi^e = 0. \quad (4.11)$$

On choisit comme solution de (4.11) un potentiel Φ^e qui conduit à un champ extérieur $\mathbf{E}_{\mathbf{r}}^e$ linéaire dans le plan transverse, car on souhaite focaliser le faisceau par des champs linéaires en r . La seule solution est alors $\Phi^e = 0$. Notons que dans le cas paraxial non axisymétrique, les solutions de (4.11) sont des solutions harmoniques en \mathbf{r} . La fonction harmonique $\Phi^e = E_0/\delta(z)(y^2 - x^2)$, $\delta(z) > 0$ correspond à la propagation d'un faisceau dans une chaîne de quadrupoles électriques (FODO), où le faisceau est successivement focalisé dans la direction x et défocalisé dans la direction y , puis focalisé dans la direction y et défocalisé dans la direction x . Notons que les variations le long de l'axe de propagation z étant très faibles (hypothèses du modèle paraxial) les contributions des forces auto-consistantes longitudinales sont négligeables. Comme dans l'approximation du modèle paraxial les effets du champ magnétique auto-consistant longitudinal sont négligés le champ B_z extérieur servira à focaliser le faisceau. Puisque

on considère une chaîne de focalisation uniforme alors B_z est constant. D'après (4.8) Il en résulte que

$$-\Delta_{\mathbf{r}}\chi^e = 0 \quad (4.12)$$

Comme dans le cas des forces électriques extérieures transverses, on souhaite que les forces magnétiques extérieures transverses soient linéaires en r , d'où le choix de la solution $\chi^e = 0$ pour l'équation (4.12). On en déduit que $\mathbf{E}_{\mathbf{r}}^e = \mathbf{B}_{\mathbf{r}}^e = 0$ et que les forces extérieures sont données par

$$\begin{aligned} F_x^e &= qv_y B_z^e \\ F_y^e &= -qv_x B_z^e \end{aligned}$$

Notons au passage que dans le cas paraxial non axisymétrique, la fonction harmonique $\chi^e = -B_0/\delta(z)yx$, $\delta(z) > 0$ solution de (4.12) correspond à un faisceau qui se propage dans une chaîne de quadrupoles magnétiques. Puisque $\mu_0\varepsilon_0c^2 = 1$, d'après (4.9) et (4.10) on a

$$\chi^s = \frac{u_z}{c^2}\Phi^s,$$

et les forces auto-consistantes sont alors données par

$$\begin{aligned} F_x^s &= q \left(-\frac{\partial\Phi^s}{\partial x} - u_z B_y^s \right) = -q \left(1 - \frac{u_z^2}{c^2} \right) \frac{\partial\Phi^s}{\partial x} \\ F_y^s &= q \left(-\frac{\partial\Phi^s}{\partial x} + u_z B_x^s \right) = -q \left(1 - \frac{u_z^2}{c^2} \right) \frac{\partial\Phi^s}{\partial y} \end{aligned}$$

Finalemt, si on passe en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , en tenant compte de $\partial_{\theta}f = 0$, le modèle de Vlasov paraxial s'écrit

$$u_z \frac{\partial f}{\partial z} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{q}{m} \left(1 - \frac{u_z^2}{c^2} \right) E_r^s(t, r) + \frac{qB_z^e}{m} v_{\theta} + \frac{v_{\theta}^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \left(\frac{qB_z^e}{m} v_r + \frac{v_r v_{\theta}}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_{\theta}} = 0.$$

avec $z = u_z t$ (on rappelle qu'on a supposé u_z constante) et $E_r^s = E_s$ où

$$E_s = -\frac{\partial\Phi^s}{\partial r}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi^s}{\partial r} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad \rho(t, r) = q \int_{\mathbb{R}^2} f(t, r, v_r, v_{\theta}) dv_r dv_{\theta}.$$

On suppose que le faisceau est non relativiste c'est-à-dire que $u_z^2/c^2 \ll 1$. L'équation de Vlasov axisymétrique s'écrit alors

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{q}{m} E_s(t, r) + \frac{qB_z^e}{m} v_{\theta} + \frac{v_{\theta}^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \left(\frac{qB_z^e}{m} v_r + \frac{v_r v_{\theta}}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_{\theta}} = 0. \quad (4.13)$$

Afin de réduire la dimension du problème il suffit de chercher un invariant du système et écrire l'équation de Vlasov avec ce nouvel invariant. En effet si I_1, I_2, I_j, \dots sont des invariants du système alors n'importe quelle distribution arbitraire $f(I_1, I_2, \dots, I_j, \dots)$ est une solution stationnaire du système de Vlasov. En effet si

on récrit l'équation de Vlasov en utilisant les invariants d'après le théorème de Liouville ($\frac{df}{dt} = 0$) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial f}{\partial I_j} \frac{dI_j}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

car $dI_i/dt = 0$, $i = 1, 2, \dots$. Dans le cas non stationnaire, d'après (4.14) on voit que si on arrive à trouver des invariants du mouvement on pourra réduire le nombre de terme dans la somme (4.14) et le système s'écrira alors

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \sum_j \frac{\partial f}{\partial I_j} \frac{dI_j}{dt} \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

où les I_j sont des invariants du mouvement non stationnaire et les q_i sont les variables de l'espace des phases réduit satisfaisant les équations du mouvement $dq_i/dt = F_i$ (où les F_i qui dépendent des q_i sont données par la physique du problème considéré).

Dans le cas d'un faisceau confiné par un champ magnétique longitudinal, une particule décrit un mouvement de giration hélicoïdal autour des lignes de champ. Si on se place dans le repère de Larmor qui tourne autour des lignes de champ à la fréquence de Larmor $\omega_L = qB_z/(2m)$, alors on a conservation du moment cinétique qui dans le repère cylindrique s'écrit

$$I = rv_\theta + \frac{qB_z^e}{2m}r^2.$$

On effectue le changement de variables $(r, v_r, v_\theta) \rightarrow (r, v_r, I)$ et finalement on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(\frac{q}{m} E_s(t, r) + \frac{I^2}{r^3} - \left(\frac{qB_z^e}{2m} \right)^2 r \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} = 0 \quad \forall I \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

Ici on considère que le faisceau est focalisé par un champ magnétique longitudinal constant uniforme. Cependant on peut aussi considérer une focalisation par un champ électrique radial linéaire en r dans un canal de focalisation uniforme. En effet si on considère

$$E_a(t, r) = -\omega_0^2 r$$

on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(E_s(t, r) + \frac{I^2}{r^3} + E_a(t, r) \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} = 0 \quad \forall I \in \mathbb{R}. \quad (4.16)$$

En faisant le changement de variables $(r, v_r, I) \rightarrow (r, v_r, v_\theta)$, où maintenant l'invariant est donné par $I = rv_\theta$, après adimensionnement on obtient l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_r \frac{\partial f}{\partial r} + \left(E_s(t, r) + E_a(t, r) + \frac{v_\theta^2}{r} \right) \frac{\partial f}{\partial v_r} - \frac{v_r v_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial v_\theta} = 0. \quad (4.17)$$

Notons que la physique issue de la focalisation avec champ électrique radial linéaire dans une chaîne de focalisation uniforme n'est pas équivalente à celle obtenue par focalisation avec un champ magnétique longitudinal constant. En effet la différence tient au fait que dans le cas de la focalisation par champ magnétique il existe un courant orthoradial j_θ généré par la force orthoradiale $v_r \times B_z^e$ alors que dans le cas de la focalisation par champ électrique, comme on néglige tous les phénomènes magnétiques auto-consistants (le modèle de Vlasov-Poisson axisymétrique ne prenant en compte que l'évolution du champ électrique) il n'y a pas de courant orthoradial. Si les trajectoires des particules sont différentes dans les deux types de focalisation, la densité radiale, le courant et le champ électrique radial sont identiques. En fait la focalisation par champ électrique est équivalente à la focalisation par champ magnétique dans le repère de Larmor. En effet à partir de l'équation de Vlasov paraxiale (4.2), après un premier changement de variable dans le repère de Larmor

$$\begin{cases} x_L = x \cos \Theta(z) - y \sin \Theta(z), & p_{x_L} = (v_x - \omega_L y) \cos \Theta(z) - (v_y + \omega_L x) \sin \Theta(z) \\ y_L = x \sin \Theta(z) + y \cos \Theta(z), & p_{y_L} = (v_x - \omega_L y) \sin \Theta(z) + (v_y + \omega_L x) \cos \Theta(z) \end{cases}$$

avec $\Theta(z) = \frac{1}{u_z} \int_0^z \omega_L d\zeta$, et un second changement de variable cylindrique dans le repère de Larmor

$$r^2 = x_L^2 + y_L^2, \quad v_r = p_{x_L} \cos \theta + p_{y_L} \sin \theta, \quad v_\theta = -p_{x_L} \sin \theta + p_{y_L} \cos \theta,$$

on obtient (4.17) avec $E_a(t, r) = -\omega_L^2 r$.

4.3 Solutions stationnaires

Ici on considère le cas de focalisation le plus simple, à savoir une chaîne uniforme dans laquelle les forces extérieures sont linéaires, axisymétriques, et indépendantes de la distance longitudinale z . Dans une telle chaîne, les champs auto-consistants ont la propriété d'être axisymétriques et indépendants de z , le long de l'axe. Une solution stationnaire dans une chaîne uniforme est caractérisée par le fait que pour toutes les forces agissant sur les particules on a $\partial/\partial t = 0$ (ou $\partial/\partial z = 0$). Dans le cas de l'approximation paraxiale non relativiste il est facile de voir que les équations du mouvement peuvent être dérivées des équations de Hamilton à partir du Hamiltonien transverse H_\perp défini par

$$H_\perp(r, r'_\perp) = \frac{1}{2} r'^2_\perp + \frac{1}{2} \omega_0^2 r^2 + \frac{q}{m} \phi_s(r), \quad (4.18)$$

où $r'_\perp = v_\perp/u_z$ et $v_\perp = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$. Le terme $r'^2_\perp/2$ est l'énergie cinétique transverse, $\omega_0^2 r^2/2$ le potentiel appliqué de focalisation et $q\phi_s(r)/m$ le potentiel électrique auto-consistant. Physiquement le Hamiltonien (4.18) correspond à la propagation d'un faisceau avec focalisation uniforme en z et linéaire en r par un champ électrique radial dans le repère cylindrique du laboratoire ou à la propagation d'un faisceau avec focalisation par un champ magnétique longitudinal uniforme en z dans le repère de Larmor avec $\omega_0 = \omega_L$. Si la force de focalisation est linéaire dans le cas du champ électrique il n'est pas évident de se rendre compte que pour la focalisation par champ magnétique la force de focalisation est linéaire dans le repère de Larmor. En effet dans le repère cartésien du laboratoire les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, & \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x = \frac{q}{m} B_z v_y, & \dot{v}_y = -\frac{q}{m} B_z v_x. \end{cases} \quad (4.19)$$

En faisant le changement de variable

$$p_x = v_x - \omega_L y, \quad p_y = v_y + \omega_L x$$

le système (4.19) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = p_x + \omega_L y, & \dot{y} = p_y - \omega_L x \\ \dot{p}_x = \omega_L p_y - \omega_L^2 x, & \dot{p}_y = -\omega_L p_x - \omega_L^2 y. \end{cases} \quad (4.20)$$

Finalement en introduisant le changement de variables dans le repère de Larmor, qui n'est autre qu'une rotation d'angle θ définie par la matrice de rotation

$$\begin{pmatrix} x_L \\ v_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{où } \theta = \theta(t) = \int_0^t \omega_L d\tau,$$

on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}_L = p_{x_L} & \dot{y}_L = p_{y_L} \\ \dot{p}_{x_L} = -\omega_L^2 x_L & \dot{p}_{y_L} = -\omega_L^2 y_L. \end{cases}$$

qui montre bien que les forces extérieures sont linéaires dans le repère de Larmor. Puisque H_\perp est un invariant du système qui traduit la conservation de l'énergie totale transverse alors toute fonction $f(H_\perp)$ dans l'espace transverse $(r, \theta, r'_\perp, \psi)$ est une solution stationnaire de (4.17) ou de (4.13) écrite dans le repère de Larmor. D'abord calculons la densité $n(r)$,

$$n(r) = \int_0^{a'(r)} \int_0^{2\pi} f(H_\perp(r, r'_\perp)) r'_\perp d\psi dr'_\perp = \pi \int_0^{a'^2(r)} f(H_\perp(r, r'_\perp)) d(r'^2_\perp) \quad (4.21)$$

où $a'(r)$ est la valeur maximum de r'_\perp des particules à la distance radiale r . Si on pose $\mathcal{E}(r)$ le potentiel électrique total

$$\mathcal{E}(r) = \frac{1}{2} \omega_0^2 r^2 + \frac{q}{m} \phi_s(r)$$

le Hamiltonien se récrit

$$H_{\perp}(r, r'_{\perp}) = \frac{1}{2}r'_{\perp}{}^2 + \mathcal{E}(r). \quad (4.22)$$

Une particule atteignant le bord extérieur du faisceau défini par $r_{\max} = a$, arrive avec une vitesse nulle et une énergie transverse la plus élevée (H_{\perp}) donnée par $H_0 = \mathcal{E}(a)$ (A1), et $r'_{\perp}(a) = 0$ (A2). Pour tout rayon $r < a$ à l'intérieur du faisceau cette particule a la vitesse maximum $a'(r)$ et son Hamiltonien est $H_0 = a'^2(r)/2 + \mathcal{E}(r) = \mathcal{E}(a)$ (A3). On en déduit que $a'^2(r) = 2(\mathcal{E}(a) - \mathcal{E}(r))$ (A4), et la densité (4.21) est alors donnée par

$$n(r) = 2\pi \int_0^{\mathcal{E}(a) - \mathcal{E}(r)} f(H_{\perp}(r, r'_{\perp})) d\left(\frac{r'_{\perp}{}^2}{2}\right) = 2\pi \int_{\mathcal{E}(r)}^{\mathcal{E}(a)} f(H_{\perp}) dH_{\perp}. \quad (4.23)$$

Le potentiel auto-consistant ϕ_s est donc solution de

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_s(r)}{dr} \right) = -\frac{2\pi q}{\varepsilon_0} \int_{\mathcal{E}(r)}^{\mathcal{E}(a)} f(H_{\perp}) dH_{\perp}. \quad (4.24)$$

La frontière de la distribution de particules dans l'espace à quatre dimensions au-delà de laquelle la densité est nulle est définie par la valeur maximum du Hamiltonien, c'est-à-dire $H_{\perp}(r, r'_{\perp}) = H_0 = \mathcal{E}(a)$. Si $a' = a'(0)$ définit la valeur maximum de $a'(r)$ au rayon $r = 0$, à partir de (4.22) et de (A1) – (A4) l'équation de la frontière s'écrit

$$\frac{r'_{\perp}{}^2}{a'^2} + \frac{\mathcal{E}(r) - \mathcal{E}(0)}{\mathcal{E}(a) - \mathcal{E}(0)} = 1. \quad (4.25)$$

Dans la suite on présente deux fonctions de distributions stationnaires auto-consistantes connues dans la littérature, la distribution K-V et la distribution de Maxwell-Boltzmann.

4.3.1 La distribution K-V (Kapchinsky-Vladimirsky)

Dans un système de focalisation uniforme, la distribution K-V peut être représentée par une distribution de Dirac du Hamiltonien c'est-à-dire

$$f(H_{\perp}) = f_0 \delta(H_{\perp} - H_0), \quad (4.26)$$

où f_0 est une constante de normalisation. Cette distribution a pour propriété que toutes les particules du faisceau ont la même énergie transverse définie par H_0 . La distribution des particules est une distribution surfacique et les particules sont réparties uniformément sur une surface d'un hyper-ellipsoïde à quatre dimensions de l'espace des phases. La densité de particules est obtenue en substituant (4.26) à f dans (4.23) c'est-à-dire

$$n(r) = 2\pi \int_{\mathcal{E}(r)}^{\mathcal{E}(a)} \delta(H_{\perp} - H_0) dH_{\perp} = 2\pi f_0 = n_0$$

pour $H_{\perp} \leq H_0 = \mathcal{E}(a)$. La densité est uniforme et on a $f_0 = n_0/2\pi$. A partir de (4.24) et de la condition aux limites $\phi_s(a) = 0$ on obtient un potentiel auto-consistant quadratique et un champ auto-consistant linéaire donnés par

$$\phi_s(r) = \frac{qn_0}{4\epsilon_0}(a^2 - r^2), \quad E_r^s(r) = \frac{qn_0}{2\epsilon_0}r.$$

En utilisant l'expression

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 + \frac{\omega_p^2}{4}(a^2 - r^2), \quad \omega_p^2 = \frac{q^2 n_0}{\epsilon_0 m}$$

et la relation (4.25) la surface décrite par une particule dans l'espace des phases est dans le repère de Larmor l'ellipse

$$\frac{r_{\perp}'^2}{a'^2} + \frac{r^2}{a^2} = 1. \quad (4.27)$$

Le résultat obtenu dans le cas d'un système avec focalisation uniforme, se généralise dans le cas où les forces de focalisation varient avec la distance z (focalisation périodique, focalisation par quadrupole électrique ou magnétique) et restent linéaires en r . La distribution K-V reste une solution stationnaire de l'équation de Vlasov et les particules décrivent encore des trajectoires elliptiques dans l'espace des phases définies par l'équation (4.27), où maintenant le rayon $a = a(z)$, dépend de z et est solution de

$$\ddot{a} + \kappa_0(z)a - \frac{K}{a} - \frac{\epsilon^2}{a^3} = 0 \quad (4.28)$$

où $\kappa_0(z)$ est la force de focalisation linéaire en r variant en z (par exemple dans le cas d'un champ magnétique solénoïdal périodique on a $\kappa_0(z) = (qB_z(z)/2m)^2$), K , la pervéance et $\epsilon = aa'$ l'émittance du faisceau qui est un invariant du mouvement et qui du point de vue géométrique représente l'aire de l'ellipse (4.27) $\pi aa'$ à π près. Les particules du faisceau sont donc réparties sur une ellipse qui se déforme et tourne dans l'espace des phases (r, r'_{\perp}) , de manière auto-similaire, en conservant son aire, au cours du transport (Pour plus de détails voir [175]).

4.3.2 La distribution de Maxwell-Boltzmann

Un autre exemple de fonction stationnaire est la distribution Gaussienne définie par

$$f(H_{\perp}) = f_0 \exp\left(-\frac{mH_{\perp}}{k_b T_{\perp}}\right), \quad (4.29)$$

où f_0 est une constante de normalisation, k_b la constante de Boltzmann, et T_{\perp} la température transverse du faisceau. La valeur de H_{\perp} ne peut pas du point de vue physique être arbitrairement grande puisque le faisceau a un rayon fini. Puisque le Hamiltonien H_{\perp} varie entre 0 et $H_0 = \mathcal{E}(a)$, l'exponentielle doit être tronquée

à partir d'une valeur $H_{\perp, \max} = H_0$, avec $f(H_{\perp}) = 0$ pour $H_{\perp} > H_0$. A partir de (4.23) et (4.29) on obtient la densité

$$n(r) = 2\pi f_0 \frac{k_b T_{\perp}}{m} \left\{ \exp\left(-\frac{m\mathcal{E}(r)}{k_b T_{\perp}}\right) - \exp\left(-\frac{m\mathcal{E}(a)}{k_b T_{\perp}}\right) \right\}$$

qui substituée dans l'équation de Poisson (4.24) donne l'équation

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\phi_s(r)}{dr} \right) = 2\pi f_0 \frac{q k_b T_{\perp}}{\varepsilon_0 m} \left\{ \exp\left(-\frac{m\omega_0^2 r^2}{k_b T_{\perp}} - \frac{q\phi_s(r)}{k_b T_{\perp}}\right) - \exp\left(-\frac{mH_0}{k_b T_{\perp}}\right) \right\}, \quad (4.30)$$

qui doit être résolue numériquement pour obtenir le potentiel ϕ_s et la densité n . Si on suppose que la fonction Gaussienne $f(H_{\perp})$ n'est pas tronquée ($\exp(-mH_0/(k_b T_{\perp})) \rightarrow 0$), alors elle devient identique à la distribution de Maxwell-Boltzmann. La densité $n(r)$ devient la distribution de Maxwell-Boltzmann

$$n(r) = n(0) \exp\left(-\frac{q\phi(r)}{k_b T_{\perp}}\right)$$

où ϕ inclut à la fois le potentiel appliqué ϕ_a et le potentiel auto-consistant ϕ_s , et $n(0) = 2\pi f_0 m / (k_b T_{\perp})$. Si on ne sait pas intégrer analytiquement l'équation de Poisson (4.30) où le second membre est remplacé par $n(r) = n(0) \exp(-q\phi(r)/(k_b T_{\perp}))$, on peut distinguer deux cas particulier important. Lorsque le faisceau est laminaire ($T_{\perp} \rightarrow 0$), et que le potentiel auto-consistant compense exactement le potentiel appliqué

$$\frac{m\omega_0^2 r^2}{2} = -q\phi_s(r) = \frac{q^2 n_0 r^2}{4\varepsilon_0},$$

la densité est dans ce cas uniforme à l'intérieur du faisceau, c'est-à-dire

$$n(r) = \begin{cases} n_0 & 0 \leq r \leq a \\ 0 & r > a. \end{cases}$$

Dans le second cas lorsque $T_{\perp} \rightarrow \infty$ et que la charge d'espace est négligeable, on obtient un profil de densité Gaussien

$$n(r) = n(0) \exp\left(-\frac{m\omega_0^2 r^2}{2k_b T_{\perp}}\right).$$

Le premier cas correspond à des faisceaux de haute intensité et de faible énergie transverse où la charge d'espace domine alors que le second cas correspond à des faisceaux de haute énergie de grande émittance. Dans le cas général il faut résoudre l'équation de Poisson numériquement et les particules du faisceau sont réparties sur une infinité d'ellipses emboîtées les unes dans les autres qui se déforment et tournent dans le plan des phases (r, r'_{\perp}) , de manière auto-similaire en conservant leur aire, au cours du transport.

4.4 Discrétisation de l'équation de Vlasov axisymétrique.

Pour une valeur fixe de I , d'après l'équation de Vlasov (4.16) les courbes caractéristiques sont définies par le système d'équations différentielles ordinaires

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v_r, \\ \frac{dv_r}{dt} = F(t, r) = E_s(t, r) + \frac{I^2}{r^3} - \omega_0^2 r. \end{cases} \quad (4.31)$$

Afin de résoudre l'équation de Vlasov axisymétrique on applique le schéma de splitting suivant. Supposons que l'on connaît la fonction $f(t^n, r, v_r, I)$ l'algorithme semi-discrétisé en temps devient

1. Pour tout $I \in \mathbb{R}$ on effectue une première demie advection dans l'espace physique r :

$$\begin{aligned} f^*(r, v_r, I) &= f(t^n, r - v_r \Delta t / 2, v_r, I), \\ \partial_r f^*(r, v_r, I) &= \partial_r (f(t^n, r - v_r \Delta t / 2, v_r, I)), \\ &= \partial_r f(t^n, r - v_r \Delta t / 2, v_r, I), \\ \partial_{v_r} f^*(r, v_r, I) &= \partial_{v_r} (f(t^n, r - v_r \Delta t / 2, v_r, I)), \\ &= -\frac{\Delta t}{2} \partial_r f(t^n, r - v_r \Delta t / 2, v_r, I) + \partial_{v_r} f(t^n, r - v_r \Delta t / 2, v_r, I). \end{aligned}$$

2. On calcule le champ électrique $E^*(r)$ en substituant f^* dans l'équation de Poisson ; c'est-à-dire on résout le système suivant :

$$\begin{cases} E^*(r) &= -\partial_r \phi^*(r) \\ -\Delta_r \phi^*(r) &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi^*(r)}{\partial r} \right) = \rho^*(r) \\ \rho^*(r) &= \frac{1}{r} \int f^*(r, v_r, I) dv_r dI, \end{cases}$$

3. Pour tout $I \in \mathbb{R}$ on effectue une advection entière dans l'espace des vitesses v_r :

$$\begin{aligned} f^{**}(r, v_r, I) &= f^*(r, v_r - F^*(r, I) \Delta t, I), \\ \partial_r f^{**}(r, v_r, I) &= \partial_r (f^*(r, v_r - F^*(r, I) \Delta t, I)), \\ &= \partial_r f^*(r, v_r - F^*(r, I) \Delta t, I) - \Delta t \partial_r F^*(r, I) \partial_{v_r} f^*(r, v_r - F^*(r, I) \Delta t, I), \\ \partial_{v_r} f^{**}(r, v_r, I) &= \partial_{v_r} (f^*(r, v_r - F^*(r, I) \Delta t, I)), \\ &= \partial_{v_r} f^*(r, v_r - F^*(r, I) \Delta t, I) \end{aligned}$$

où

$$F^*(r, I) = E^*(r) + \frac{I^2}{r^3} - \omega_0^2 r$$

4. On effectue une seconde demie advection dans l'espace physique r :

$$\begin{aligned} f(t^{n+1}, r, v_r, I) &= f^{**}(r - v_r \Delta t/2, v_r, I), \\ \partial_r f(t^{n+1}, r, v_r, I) &= \partial_r (f^{**}(r - v_r \Delta t/2, v_r, I)), \\ &= \partial_r f^{**}(r - v_r \Delta t/2, v_r, I), \\ \partial_v f(t^{n+1}, r, v_r, I) &= \partial_{v_r} (f^{**}(r - v_r \Delta t/2, v_r, I)), \\ &= -\frac{\Delta t}{2} \partial_r f^{**}(r - v_r \Delta t/2, v_r, I) + \partial_{v_r} f^{**}(r - v_r \Delta t/2, v_r, I) \end{aligned}$$

L'espace des phases à discrétiser est (r, v_r, I) . Pour le sous espace (r, v_r) on utilise un maillage non structuré dont la frontière est une demie ellipse. Pour la discrétisation de f dans l'espace (r, v_r) on peut utiliser les schémas NC1, HCTC, HCTR ou GD. Pour la discrétisation de I on utilise une grille. Comme il est précisé dans [86] on doit choisir une discrétisation appropriée dans la direction I . En effet quand le champ électrique total est linéaire comme dans le cas de la distribution K-V, les courbes caractéristiques peuvent se récrire comme

$$\frac{\omega^2}{2} r^2 + v_r^2 + \frac{I^2}{r^2} = c \quad (4.32)$$

où c est une constante et

$$\frac{\omega^2}{2} r^2 = \left(\frac{\omega_0^2}{2} - \frac{n_0}{4} \right) r^2 = -(\phi_s + \phi_a).$$

Alors, on doit contrôler le rapport I/r , et la discrétisation dans la direction I doit vérifier

$$I = \pm \omega r^2.$$

Soit N_I le nombre de points de discrétisation pour la variable I , alors le maillage en I est choisi de telle sorte que

$$I = \left(\frac{2a}{N_I} \right)^2 \eta \omega_0 i^2, \quad i \in \left[-\frac{N_I}{2}, \frac{N_I}{2} \right].$$

Pendant la demie advection dans l'espace physique on a besoin d'une condition aux limites artificielle pour $r = 0$. En effet pour $r = 0$ et $v_r > 0$ le flux de particules est rentrant alors que pour $v_r < 0$ le flux de particules est sortant, et les particules quittent le domaine de calcul. Alors pour modéliser le passage des particules à travers l'axe $r = 0$, on impose une réflexion spéculaire comme condition aux limites sur l'axe $r = 0$

$$f(0, v_r, I) = f(0, -v_r, I), \quad \forall v_r > 0.$$

Pendant l'advection dans l'espace des vitesses on a besoin de calculer $\partial_r F(t, r)$. Grâce à l'équation de Poisson on obtient

$$\frac{\partial F}{\partial r}(t, r) = \rho(t, r) - \frac{E(t, r)}{r} - 3 \left(\frac{I}{r^2} \right)^2 - \omega_0^2.$$

4.5 La focalisation

La distribution K-V (modèle du faisceau idéal) n'est pas le meilleur modèle pour représenter un faisceau de laboratoire mais il a été étudié par plusieurs auteurs et est le point de départ pour la focalisation ([175]). En effet pour analyser et comparer le comportement des distributions stationnaires et non stationnaires, Lapostolle et Sacherer en 1971 ont introduit les quantités RMS et le concept de faisceaux équivalent. Selon ce concept deux faisceaux composés du même type de particules ayant la même densité, le même courant et la même énergie cinétique sont équivalents si les seconds moments de la fonction de distribution sont égaux. Si on considère une fonction de distribution stationnaire ou non stationnaire $f(x, y, x', y')$ à quatre dimensions dans l'espace transverse où $x' = v_x/u_z$ et $y' = v_y/u_z$, le second moment en x est défini par

$$\overline{x^2} = \int_{\mathbb{R}^4} x^2 f(x, y, x', y') dx dy dx' dy',$$

et le rayon RMS dans la direction x est donné par

$$x_{rms} = \sqrt{\overline{x^2}}.$$

De la même manière on peut définir y_{rms} , x'_{rms} et y'_{rms} . Par exemple pour une distribution K-V dont la frontière est une ellipse dans le plan $x-x'$, si on considère la position où les axes de l'ellipse sont parallèles aux axes du repère et où $x_{max} = a$, $x'_{max} = a'$ désignent respectivement la position maximum en x et la vitesse maximum alors on peut montrer que

$$\overline{x^2} = a^2/4, \quad \overline{x'^2} = a'^2/4.$$

Alors on introduit l'émittance RMS ϵ_x qui est une quantité fondamentale dans la physique des faisceaux

$$\epsilon_x = \sqrt{(\overline{x^2} \overline{x'^2} - \overline{xx'})^2}.$$

Afin de calculer l'émittance ϵ_x à partir des coordonnées cylindriques en observant que $\overline{x^2} = \pi \overline{r^2}$, $\overline{x'^2} = \pi \overline{r'^2}$ et $\overline{xx'} = \pi \overline{rv'_r}$, où $v'_r = v_r/u_z$ un calcul simple donne

$$\epsilon_x = \pi \sqrt{\overline{r^2 r'^2} - \overline{rv'_r}^2},$$

où

$$\overline{r^2} = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} r^2 f(r, v'_r, I') dr dv'_r dI'}{\int_{\mathbb{R}^3} f(r, v'_r, I') dr dv'_r dI'}, \quad \overline{r'^2} = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} r'^2 f(r, v'_r, I') dr dv'_r dI'}{\int_{\mathbb{R}^3} f(r, v'_r, I') dr dv'_r dI'}$$

et

$$\overline{rv'_r} = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} rv'_r f(r, v'_r, I') dr dv'_r dI'}{\int_{\mathbb{R}^3} f(r, v'_r, I') dr dv'_r dI'}.$$

où $I' = I/u_z$.

Bien que l'émittance est constante pour un faisceau K-V, pour des formes de faisceaux plus générales l'émittance n'est pas constante, croît et oscille à cause des effets non linéaires, conséquences du couplage entre l'équation de Vlasov et de Poisson. Pour simuler la propagation de faisceaux de laboratoire on utilise le modèle de faisceau semi-Gaussien, Gaussien et de Maxwell-Boltzmann. Le dernier est un équilibre analytique et afin de focaliser les faisceaux semi-Gaussien et Gaussien on utilise la distribution K-V et le concept de faisceaux équivalents. En effet les paramètres initiaux sont calculés de telle sorte que leurs moments soient égaux à ceux de la distribution K-V. Si on trace les courbes caractéristiques définies par (4.32) on obtient une infinité de demi ellipses emboîtées les unes dans les autres qui se referment lorsqu'on s'approche de l'axe $r = 0$, chacune des demies ellipses correspondant à une valeur de I . L'ellipse frontière (extérieure) correspond à $I = 0$. Si les particules correspondant à $I = 0$ sont focalisées alors, elles le seront pour tout I . Les paramètres de focalisation se calculent en prenant $I = 0$ dans (4.31) et en prenant une densité de charge uniforme n_0 qui conduit après résolution de l'équation de Poisson à un champ électrique $E_s(t, r)$ linéaire en r . Les équations (4.31) conduisent à l'équation différentielle

$$\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \quad (4.33)$$

où $\omega^2 = \omega_0^2 - n_0/2$. Les trajectoires de l'équation (4.33) sont stables si $\omega^2 > 0$ ou autrement dit si

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{n_0}{2(1 - \eta^2)}}$$

est un réel pur, où $\eta = \omega/\omega_0$ est la dépression du nombre d'onde. L'égalité du moment en x implique

$$x_{rms}^f = x_{rms}^{K-V} = a/2$$

où a est le rayon du faisceau K-V équivalent, x_{rms}^{K-V} le x_{rms} du faisceau K-V, et x_{rms}^f le x_{rms} du faisceau à focaliser. Dans le cas d'un faisceau K-V dans une chaîne de focalisation uniforme le faisceau est adapté c'est à dire $\ddot{a} = 0$. En reportant $\ddot{a} = 0$ dans (4.28) on obtient

$$k_0^2 a - \frac{K}{a} - \frac{\epsilon^2}{a^3} = 0. \quad (4.34)$$

En remarquant que $\omega_p^2 = 2Ku_z^2/a^2$, $\omega_0 = k_0 u_z$ et en posant $\omega^2 = \omega_0^2 - \omega_p^2/2$ l'équation (4.34) donne la relation $\epsilon u_z = \omega a^2$. La dernière équation et l'équation $\epsilon = a a'$ impliquent que $a' = \omega a/u_z$. D'autre part Les faisceaux que l'on étudiera auront toujours un profil Gaussien en vitesse, c'est à dire de la forme

$$\frac{1}{2\pi v_{th}^2} e^{-\frac{v_x^2 + v_y^2}{2v_{th}^2}}.$$

où v_{th} est la vitesse thermique transverse du faisceau à focaliser. Le calcul du x'_{rms} d'un faisceau Gaussien est égal à v_{th}/u_z . Finalement le concept de faisceaux équivalents et par suite l'égalité du moment en v_x implique que

$$\frac{v_{th}}{u_z} = x'_{rms} = x'_{rms}^{K-V} = \frac{a'}{2} = \frac{\omega a}{2u_z}$$

et par conséquent $v_{th} = \eta\omega_0 \frac{a}{2}$.

4.6 Résultats numériques.

4.6.1 Faisceau semi-Gaussien

La donnée initiale, dans le repère Cartésien est

$$f_0(x, y, v_x, v_y) = \frac{n_0}{(2\pi v_{th}^2)(\pi a^2)} \exp\left(-\frac{1}{2v_{th}^2}(v_x^2 + v_y^2)\right).$$

si $x^2 + y^2 \leq a^2$ et $f_0(x, y, v_x, v_y) = 0$ si $x^2 + y^2 > a^2$. La densité n_0 et la pulsation ω_0 sont calculées grâce aux quantités RMS afin que le faisceau semi-Gaussien soit équivalent au faisceau K-V adapté. En fait, on fixe le rayon $a = 1$, et la vitesse thermique $v_{th} = 1$ et la dépression du nombre d'onde $\eta = \omega/\omega_0 = 1/4$. Alors on déduit que ω_0 et n_0 sont données par les formules

$$v_{th} = \frac{1}{2}a\eta\omega_0, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{n_0}{2(1-\eta^2)}}. \quad (4.35)$$

On observe la formation d'une onde de charge d'espace qui démarre au bord du faisceau et qui se propage à l'intérieur du faisceau et qui est réfléchi près de l'axe $r = 0$ (voir la figure 4.1). Au début le champ électrique est linéaire à l'intérieur du faisceau. Les variations du champ électrique total sont petites mais suffisantes pour perturber fortement la densité (voir les figures 4.1 et 4.2).

4.6.2 Le faisceau de Maxwell-Boltzmann

La donnée initiale est la distribution de Maxwell-Boltzmann (qui est une solution stationnaire analytique pour le système Vlasov-Poisson)

$$f_0(r, v_r, v_\theta) = \frac{\alpha}{2\pi} \exp\left(-\left(\frac{1}{2}(v_r^2 + v_\theta^2) + \phi_s(t, r) + \phi_a(t, r)\right)\right),$$

avec $\phi_a(t, r) = r^2/4$, $E_a(t, r) = -\partial_r \phi_a(t, r)$, $0 \leq \alpha \leq 1$ et où le potentiel ϕ_s satisfait l'équation de Poisson

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_s}{\partial r} \right) = \alpha \exp(-\phi_s - r^2/4)$$

résolue numériquement par un schéma aux différences finies. On prend $a = 1$, $v_{th} = 1$, $\eta = 1/2$. Comme la distribution de Maxwell-Boltzmann est une distribution stationnaire du système de Vlasov-Poisson il n'y a pas de variations en temps de la fonction de distribution. La figure 4.3 montre l'évolution de $\log(\rho)$. Théoriquement toutes les courbes doivent se confondre avec la solution exacte. Ceci est le cas avec une précision 3.10^{-2} . Cependant pour de faibles densités on observe que la solution numérique diffère de la solution exacte à cause de l'accumulation des erreurs de diffusion.

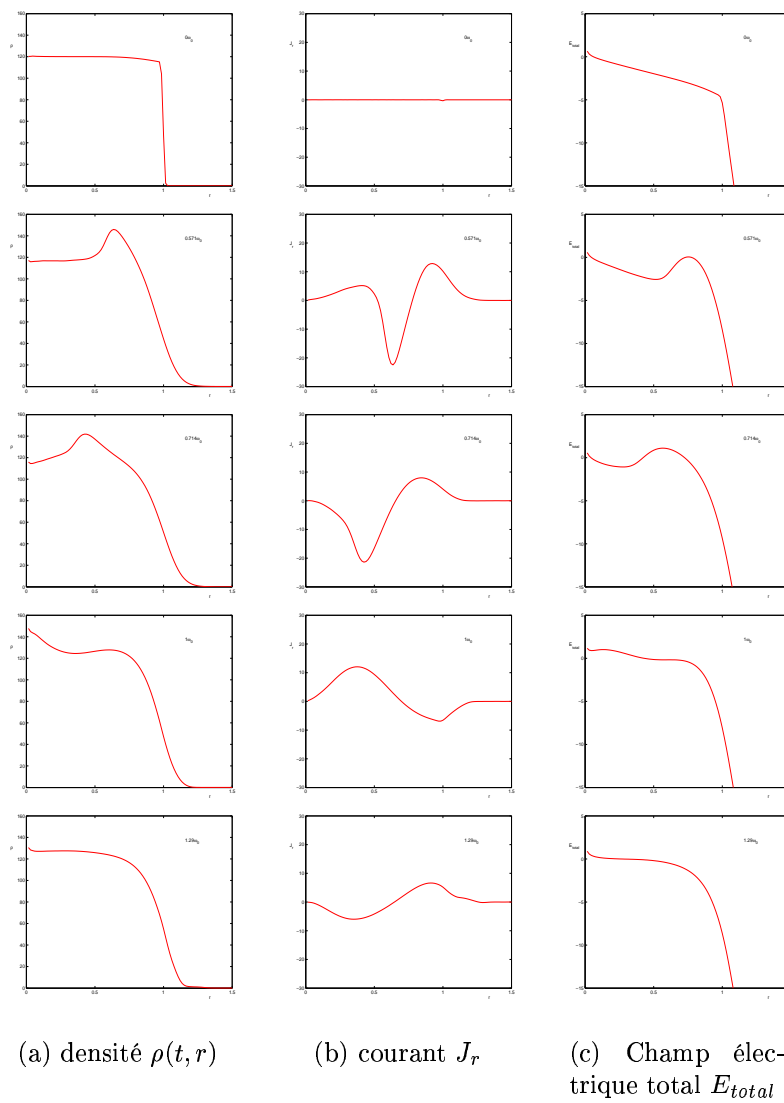


FIG. 4.1 – Evolution de la densité de charge $\rho(t, r)$ (a), de la densité de courant j_r (b), et du champ électrique total $E_{total} = E_s(t, r) - \omega_0^2 r$ (c), avec l'opérateur d'interpolation NC1 aux temps $t = 0\omega_0^{-1}, 0.571\omega_0^{-1}, 0.714\omega_0^{-1}, 1\omega_0^{-1}, 1.29\omega_0^{-1}$, $N_{mesh} = 2509056$ dans le cas du faisceau semi-Gaussien

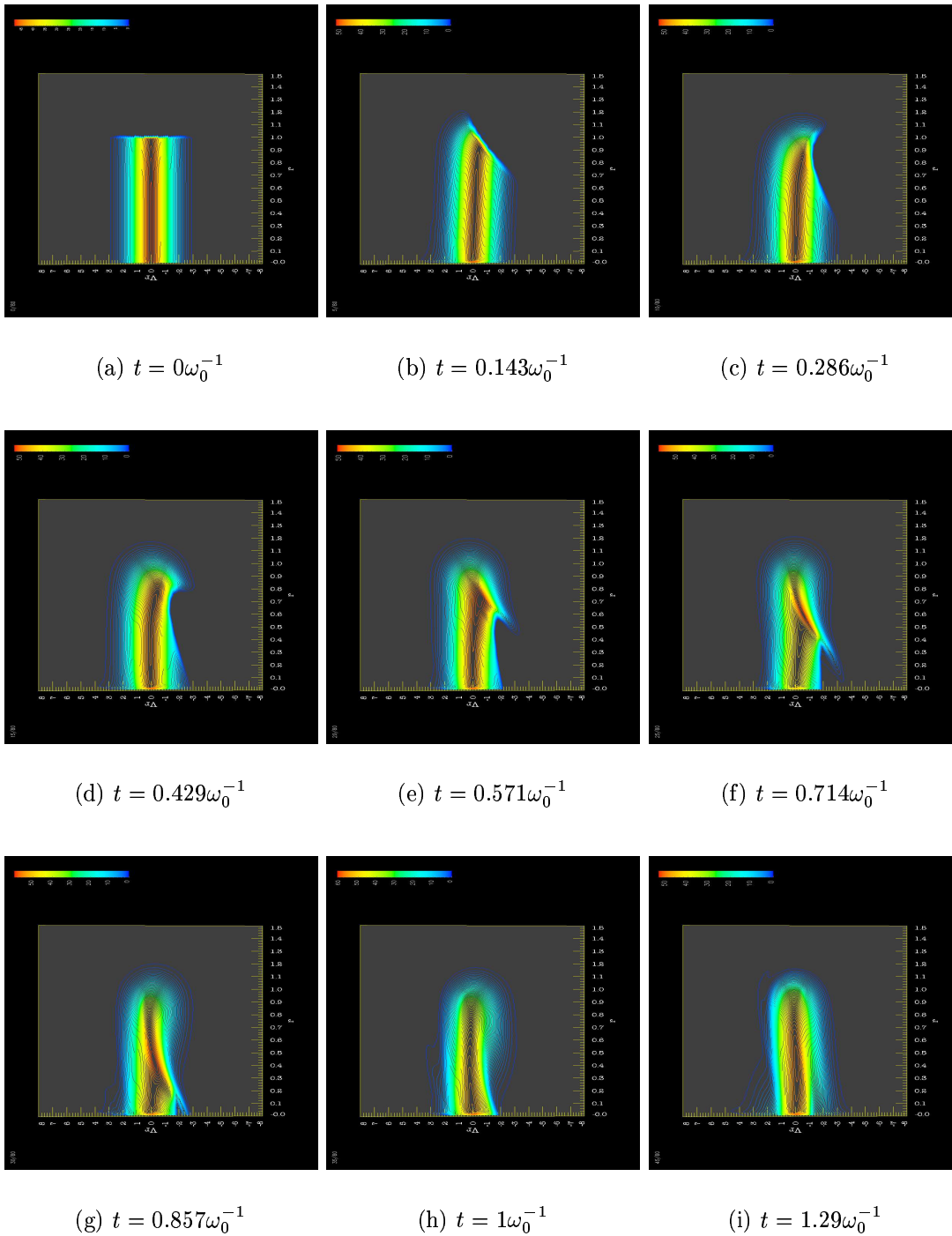


FIG. 4.2 – Evolution de la fonction de distribution f dans l'espace des phases (r, v_r) avec l'opérateur d'interpolation NC1 et $N_{mesh} = 2509056$, dans le cas du faisceau semi-Gaussien. v_r est en abscisse et r en ordonnée.

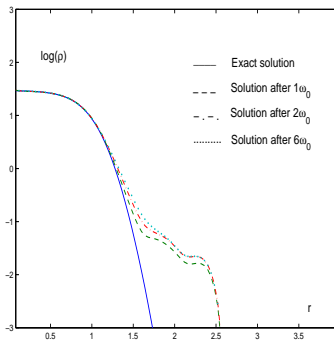


FIG. 4.3 – Evolution du logarithme de la densité de charge ρ avec l'opérateur d'interpolation NC1 et $N_{mesh} = 2509056$, dans le cas du faisceau de Maxwell-Boltzmann.

4.6.3 Faisceau Gaussien

La distribution initiale, dans le repère cartésien, est donnée par

$$f_0(x, y, v_x, v_y) = \frac{n_0}{(2\pi v_{th}^2)(\pi a^2)} \exp\left(-\frac{1}{2v_{th}^2}(v_x^2 + v_y^2)\right) \exp\left(-\frac{1}{2R^2}(x^2 + y^2)\right)$$

La densité n_0 , le rayon R et la pulsation ω_0 sont calculés grâce aux quantités RMS de telle sorte que le faisceau Gaussien soit équivalent au faisceau K-V adapté. En fait on fixe le rayon du faisceau $a = 1$, la vitesse thermique $v_{th} = 1$ et la dépression du nombre d'onde $\eta = \omega/\omega_0 = 1/4$. Comme dans le cas du faisceau semi-Gaussien on calcule ω_0 et n_0 grâce aux équations (4.35). Pour déterminer R on utilise l'égalité des x_{rms} , ce qui donne $R = a/2$. Comme dans le cas du faisceau semi-Gaussien on observe la formation d'une onde de charge d'espace qui démarre au bord du faisceau, se propage à l'intérieur du faisceau et est réfléchi près de l'axe $r = 0$ (voir les figures 4.4 et 4.5). En outre les figures 4.4 et 4.5 montrent l'apparence d'un halo autour du coeur du faisceau qui correspond au processus de filamentation de f dans l'espace des phases (r, v_r) . Le halo apparait au temps $r = 2.6$ et la densité du halo varie entre 3% et 5% de la densité du coeur du faisceau.

4.7 Conclusions

Dans ce chapitre on a présenté une méthode numérique pour résoudre l'équation de Vlasov en coordonnées cylindriques. Elle nous a permis de mettre en évidence l'apparition de phénomènes physiques fins comme le halo. Afin de considérer des focalisations physiquement plus réalistes comme la focalisation périodique ou FODO (par quadropôles magnétiques ou électriques) il faut considérer l'espace des phases complet à quatre dimensions (x, y, v_x, v_y) car la fonction de distribution n'est plus axisymétrique. Le chapitre suivant présente une extension de la méthode au modèle paraxial non axisymétrique.

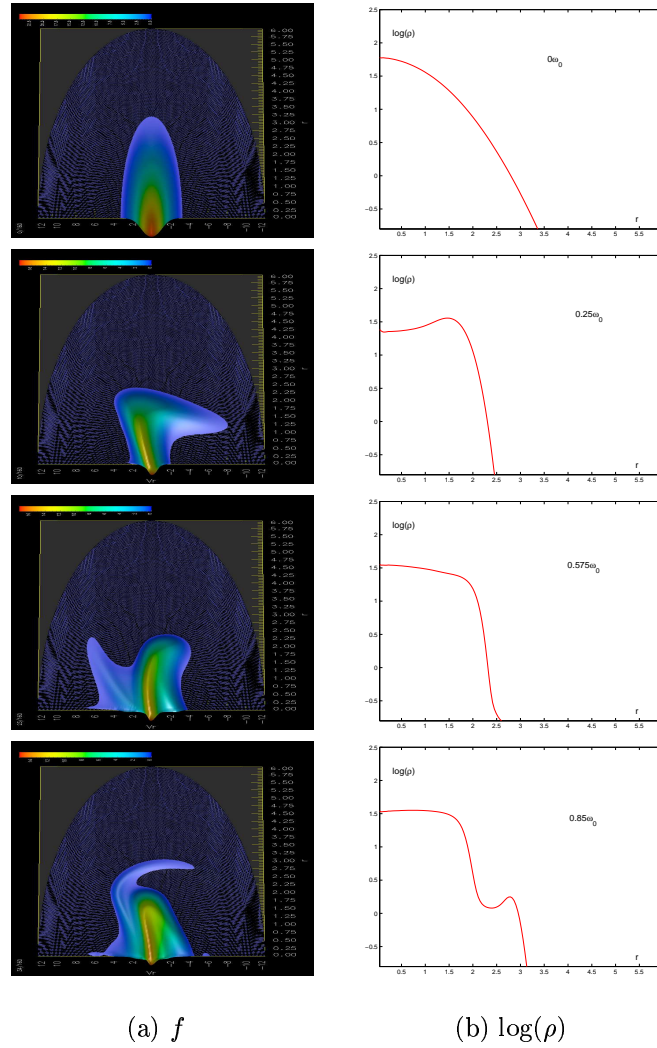


FIG. 4.4 – Evolution de la fonction de distribution f dans l'espace des phases (r, v_r) (a), et du logarithme de la densité de charge ρ (b), avec l'opérateur d'interpolation NC1 aux temps $t = 0\omega_0^{-1}, 0.25\omega_0^{-1}, 0.575\omega_0^{-1}, 0.85\omega_0^{-1}$, $N_{mesh} = 2509056$, dans le cas du faisceau Gaussien. v_r est en abscisse et r en ordonnée.

Chapitre 5

Méthodes numériques pour l'équation de Vlasov 2D

Sommaire

5.1	Le modèle	198
5.2	Résolution de l'équation de Vlasov	198
5.2.1	Semi-discrétisation en temps	198
5.2.2	Discrétisation dans l'espace des phases	200
5.3	Résolution de l'équation de Poisson	201
5.3.1	Equation de Poisson avec conditions aux limites périodiques	201
5.3.2	Equation de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet	203
5.3.3	Résolution des systèmes linéaires	208
5.4	Résultats numériques	209
5.4.1	Amortissement Landau linéaire	209
5.4.2	Faisceau Gaussien	210
5.5	Conclusion	211

5.1 Le modèle

Ici on considère le modèle paraxial non axisymétrique décrit dans le chapitre 4. Avec les notations du chapitre 3

$$\mathbf{r} = (x, y), \quad \mathbf{v}_\mathbf{r} = (v_x, v_y), \quad \mathbf{E}_\mathbf{r} = (E_x, E_y), \quad \nabla_\mathbf{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \nabla_{\mathbf{v}_\mathbf{r}} = \left(\frac{\partial}{\partial v_x}, \frac{\partial}{\partial v_y} \right),$$

le modèle s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_\mathbf{r} \cdot \nabla_\mathbf{r} f + (\mathbf{E}_{\mathbf{r}_a} + \mathbf{E}_{\mathbf{r}_s}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}_\mathbf{r}} f = 0, \quad (5.1)$$

où $f = f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_\mathbf{r}) = f(t, x, y, v_x, v_y)$, est la fonction de distribution des particules, $\mathbf{E}_{\mathbf{r}_a} = \mathbf{E}_{\mathbf{r}_a}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\mathbf{r}_a}(t, x, y)$ est un champ de focalisation transverse linéaire

$$\mathbf{E}_{\mathbf{r}_a}(t, x, y) = -\omega_0^2 \mathbf{r},$$

et $\mathbf{E}_{\mathbf{r}_s} = \mathbf{E}_{\mathbf{r}_s}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_{\mathbf{r}_s}(t, x, y)$ est le champ électrique autoconsistant solution de l'équation de Poisson

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{\mathbf{r}_s}(t, x, y) = -\nabla_\mathbf{r} \phi(t, x, y) \\ -\Delta_\mathbf{r} \phi(t, x, y) = \rho(t, x, y) \\ \rho(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}_\mathbf{r}) d\mathbf{v}_\mathbf{r} \end{cases} \quad (5.2)$$

avec

$$-\Delta_\mathbf{r} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{v}_\mathbf{r} \equiv \int_{\mathbb{R}^2} dv_x dv_y.$$

On rappelle que ce modèle peut être utilisé pour la propagation de faisceaux de particules chargées dans une chaîne de focalisation uniforme avec un champ électrique radial où avec un champ magnétique longitudinal à condition d'exprimer le système dans le repère de Larmor.

5.2 Résolution de l'équation de Vlasov

Dans cette section on présente l'extension de la méthode décrite dans le chapitre 2 au cas paraxial non axisymétrique.

5.2.1 Semi-discrétisation en temps

L'approximation en temps est basée sur un splitting de Strang. L'opérateur de transport

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + F_x \frac{\partial f}{\partial v_x} + F_y \frac{\partial f}{\partial v_y}$$

est approché par

$$\mathcal{S}(\Delta t) = \mathcal{S}_{x,y}(\Delta t/2) \circ \mathcal{S}_{v_x, v_y}(\Delta t) \circ \mathcal{S}_{x,y}(\Delta t/2)$$

où

$$\mathcal{S}_{x,y}(\Delta t)f(x, y, v_x, v_y) = f(x - v_x\Delta t/2, y - v_y\Delta t/2, v_x, v_y),$$

et

$$\mathcal{S}_{v_x,v_y}(\Delta t)f(x, y, v_x, v_y) = f(x, y, v_x - F_x(x, y)\Delta t, v_y - F_y(x, y)\Delta t).$$

Si on suppose que l'on connaît la fonction de distribution $f(t^n, x, y, v_x, v_y)$ au temps t^n , alors l'algorithme semi-discrétisé en temps permettant d'obtenir la fonction de distribution au temps t^{n+1} est

1. Première demie advection dans l'espace physique :

$$\begin{aligned} f^*(x, y, v_x, v_y) &= f(t^n, x - v_x\Delta t/2, y - v_y\Delta t/2, v_x, v_y), \\ \partial_x f^*(x, y, v_x, v_y) &= \partial_x f(t^n, x - v_x\Delta t/2, y - v_y\Delta t/2, v_x, v_y), \\ \partial_y f^*(x, y, v_x, v_y) &= \partial_y f(t^n, x - v_x\Delta t/2, y - v_y\Delta t/2, v_x, v_y), \\ \partial_{v_x} f^*(x, y, v_x, v_y) &= \partial_{v_x} f(t^n, x - v_x\Delta t/2, y - v_y\Delta t/2, v_x, v_y) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \partial_x f(t^n, x - v_x\Delta t/2, y - v_y\Delta t/2, v_x, v_y) \\ \partial_{v_y} f^*(x, y, v_x, v_y) &= \partial_{v_y} f(t^n, x - v_x\Delta t/2, y - v_y\Delta t/2, v_x, v_y) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \partial_y f(t^n, x - v_x\Delta t/2, y - v_y\Delta t/2, v_x, v_y) \end{aligned}$$

2. Calcul du champ électrique $\mathbf{E}_r^*(x, y)$ en substituant f^* dans l'équation de Poisson ; c'est-à-dire résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_r^*(x, y) &= -\nabla_r \phi^*(x, y) \\ -\Delta_r \phi^*(x, y) &= \rho^*(x, y) \\ \rho^*(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} f^*(x, y, v_x, v_y) dv_x dv_y, \end{cases}$$

3. Calcul du gradient du champ électrique $\nabla_r \mathbf{E}_r^*(x, y)$ en résolvant le système de Poisson dérivé suivant :

$$\begin{cases} \nabla_r \mathbf{E}_r^*(x, y) &= -\nabla_r (\nabla_r \phi^*(x, y)) \\ -\Delta_r (\nabla_r \phi^*(x, y)) &= \nabla_r \rho^*(x, y) \\ \nabla_r \rho^*(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_r f^*(x, y, v_x, v_y) dv_x dv_y, \end{cases}$$

4. Advection entière dans l'espace des vitesses :

$$\begin{aligned}
f^{**}(x, y, v_x, v_y) &= f^*(x, y, v_x - F_x^*(x, y)\Delta t, v_y - F_y^*(x, y)\Delta t), \\
\partial_x f^{**}(x, y, v_x, v_y) &= \partial_x f^*(x, y, v_x - F_x^*(x, y)\Delta t, v_y - F_y^*(x, y)\Delta t) \\
&\quad - \Delta t \partial_x F_x^*(x, y) \partial_{v_x} f^*(x, y, v_x - F_x^*(x, y)\Delta t, v_y - F_y^*(x, y)\Delta t), \\
&\quad - \Delta t \partial_x F_y^*(x, y) \partial_{v_y} f^*(x, y, v_x - F_x^*(x, y)\Delta t, v_y - F_y^*(x, y)\Delta t), \\
\partial_y f^{**}(x, y, v_x, v_y) &= \partial_y f^*(x, y, v_x - F_x^*(x, y)\Delta t, v_y - F_y^*(x, y)\Delta t) \\
&\quad - \Delta t \partial_y F_x^*(x, y) \partial_{v_x} f^*(x, y, v_x - F_x^*(x, y)\Delta t, v_y - F_y^*(x, y)\Delta t), \\
&\quad - \Delta t \partial_y F_y^*(x, y) \partial_{v_y} f^*(x, y, v_x - F_x^*(x, y)\Delta t, v_y - F_y^*(x, y)\Delta t), \\
\partial_{v_x} f^{**}(x, y, v_x, v_y) &= \partial_{v_x} f^*(x, y, v_x - F_x^*(x, y)\Delta t, v_y - F_y^*(x, y)\Delta t) \\
\partial_{v_y} f^{**}(x, y, v_x, v_y) &= \partial_{v_y} f^*(x, y, v_x - F_x^*(x, y)\Delta t, v_y - F_y^*(x, y)\Delta t)
\end{aligned}$$

où

$$F_x^*(x, y) = E_x^*(x, y) + E_{x_a}(x, y), \quad F_y^*(x, y) = E_y^*(x, y) + E_{y_a}(x, y).$$

5. Seconde demie advection dans l'espace physique :

$$\begin{aligned}
f(t^{n+1}, x, y, v_x, v_y) &= f^{**}(x - v_x \Delta t/2, y - v_y \Delta t/2, v_x, v_y), \\
\partial_x f(t^{n+1}, x, y, v_x, v_y) &= \partial_x f^{**}(x - v_x \Delta t/2, y - v_y \Delta t/2, v_x, v_y), \\
\partial_y f(t^{n+1}, x, y, v_x, v_y) &= \partial_y f^{**}(x - v_x \Delta t/2, y - v_y \Delta t/2, v_x, v_y), \\
\partial_{v_x} f(t^{n+1}, x, y, v_x, v_y) &= \partial_{v_x} f^{**}(x - v_x \Delta t/2, y - v_y \Delta t/2, v_x, v_y) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2} \partial_x f^{**}(x - v_x \Delta t/2, y - v_y \Delta t/2, v_x, v_y) \\
\partial_{v_y} f(t^{n+1}, x, y, v_x, v_y) &= \partial_{v_y} f^{**}(x - v_x \Delta t/2, y - v_y \Delta t/2, v_x, v_y) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{2} \partial_y f^{**}(x - v_x \Delta t/2, y - v_y \Delta t/2, v_x, v_y)
\end{aligned}$$

5.2.2 Discrétisation dans l'espace des phases

L'espace physique est approché par une triangulation non structurée, tandis que l'espace des vitesses est approché par un maillage en triangles rectangles.

★ Advection dans l'espace physique

1. Pour reconstruire f_h dans l'espace physique on peut utiliser les schémas HCT-C, HCT-R, NC1 ou GD.
2. La reconstruction de $\nabla_{x,y} f_h$ se fait en dérivant celle choisie pour reconstruire f_h , soit $\nabla_{x,y} \text{HCTC}$, $\nabla_{x,y} \text{HCTR}$, $\nabla_{x,y} \text{NC1}$ ou $\nabla_{x,y} \text{GD}$.
3. Pour reconstruire $\nabla_{v_x, v_y} f_h$ on utilise une interpolation de Lagrange d'ordre un sur des triangles ou bien une interpolation de Lagrange d'ordre deux modifiée sur des triangles qui préserve le maximum et le minimum des données (voir [31]), car l'interpolation de Lagrange d'ordre deux n'assure pas numériquement la stabilité des gradients.

★ Advection dans l'espace des vitesses

1. la fonction de distribution f_h est reconstruite à partir des schémas NC1, HCTR ou bien via l'interpolation de Lagrange symétrique de degré quelconque sur des grilles.
2. La reconstruction de $\nabla_{v_x, v_y} f_h$ s'effectue en dérivant celle choisie pour reconstruire f_h , soit ∇_{v_x, v_y} NC1, ∇_{v_x, v_y} HCTR ou bien en interpolant $\nabla_{v_x, v_y} f_h$ via une interpolation de Lagrange symétrique de degré quelconque.
3. On reconstruit $\nabla_{x, y} f_h$ en utilisant une interpolation de Lagrange de degré quelconque.

Remarque 45 *On obtient un algorithme positif et conservatif en appliquant l'algorithme développé au chapitre 3 à chaque advection. Lorsqu'on effectue du transport dans l'espace physique on parallélise par rapport aux variables de vitesses et réciproquement lorsqu'on effectue du transport dans l'espace des vitesses on parallélise par rapport aux variables de l'espace physique. Techniquement, pour assurer un transport performant on construit deux structures distinctes pour le transport dans l'espace physique et le transport dans l'espace des vitesses. Il est donc nécessaire de collecter une partie des données locale à chaque processeur et de les redistribuer aux autres processeurs pour passer d'une structure à l'autre. Il s'agit donc de faire une transposition entre processeurs de tableaux multi-dimensionnels de structures composées contenant toutes les données associées à un point de discrétisation (f_{H_h} , f_{L_h} , $\partial_x f$, $\partial_{v_x} f$, ...) qui sont destinées à évoluer au cours du temps.*

5.3 Résolution de l'équation de Poisson

La résolution du problème de Poisson intervient pour déterminer \mathbf{E} mais aussi la matrice gradient $\nabla \mathbf{E}$.

5.3.1 Equation de Poisson avec conditions aux limites périodiques

Le domaine de calcul est $\Omega =]x_0, x_0 + L_x[\times]y_0, y_0 + L_y[$ où L_x et L_y sont respectivement les périodes spatiales dans la direction x et y . Le problème de Poisson consiste à trouver le champ électrique \mathbf{E} tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = 0 \text{ sur } \Omega \\ \text{div } \mathbf{E} = \rho \text{ sur } \Omega \\ \rho(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y, v_x, v_y) dv_x dv_y, \\ \mathbf{E}(x + L_x, y) = \mathbf{E}(x, y) \\ \mathbf{E}(x, y + L_y) = \mathbf{E}(x, y) \end{array} \right.$$

ou en introduisant le potentiel électrique ϕ dont l'existence est assurée par la relation $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ le problème consiste à trouver ϕ et \mathbf{E} tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = -\nabla\phi \\ -\Delta\phi(x, y) = \rho(x, y) \\ \rho(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y, v_x, v_y) dv_x dv_y, \\ \phi(x + L_x, y) = \phi(x, y) \\ \phi(x, y + L_y) = \phi(x, y) \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Pour résoudre numériquement le système précédent (5.3) on utilise une technique d'éléments finis P1, HR, NC1, HCTR ou HCTC sur un tore à partir de la formulation du système (5.3) qui consiste à trouver $\phi \in H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla\phi \cdot \nabla\psi d\Omega = \int_{\Omega} \rho\psi, \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega)$$

Remarque 46 Si on utilise des éléments finis HR, NC1, HCTC ou HCTR, pour avoir unicité de la solution il faut rajouter les conditions aux limites périodiques sur $-\nabla\phi = E$. La fonction ϕ appartient alors à $H^2(\Omega)$.

Comme l'équation de Poisson est linéaire, pour calculer le gradient du champ électrique on dérive l'équation de Poisson. Si on introduit le potentiel vectoriel inconnu $\Phi = \nabla\phi$ le problème s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla\mathbf{E} = -\nabla\Phi \\ -\Delta\Phi = \nabla\rho \\ \nabla\rho(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla_{x,y} f(x, y, v_x, v_y) dv_x dv_y, \\ \Phi(x + L_x, y) = \Phi(x, y) \\ \Phi(x, y + L_y) = \Phi(x, y) \end{array} \right. \quad (5.4)$$

La formulation variationnelle de (5.3) consiste à trouver $\Phi \in H^1(\Omega) \otimes H^1(\Omega)$ tel que

$$\int_{\Omega} \nabla\Phi : \nabla\Psi d\Omega = \int_{\Omega} \nabla\rho \cdot \Psi, \quad \forall \Psi \in H_0^1(\Omega) \otimes H_0^1(\Omega)$$

que l'on résout par une méthode d'éléments finis P1 sur un tore.

5.3.2 Equation de Poisson avec conditions aux limites de Dirichlet

5.3.2.1 Formulation variationnelle

Le problème de Poisson avec condition de Dirichlet consiste à trouver le champ électrique \mathbf{E} tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{E} = 0 \text{ sur } \Omega \\ \text{div } \mathbf{E} = \rho \text{ sur } \Omega \\ \rho(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y, v_x, v_y) dv_x dv_y, \\ \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (5.5)$$

où $\boldsymbol{\tau}$ est tangente à la frontière de Ω . Le problème (5.5) est équivalent au problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{E} = \nabla \rho \text{ sur } \Omega \\ \text{div } \mathbf{E} = \rho \text{ sur } \partial\Omega \\ \text{rot } \mathbf{E} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \rho(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y, v_x, v_y) dv_x dv_y, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Preuve. Montrons d'abord que (5.5) \implies (5.6). Comme

$$\mathbf{rot} \text{ rot } \mathbf{E} = \nabla(\text{div } \mathbf{E}) - \Delta \mathbf{E} \quad (5.7)$$

alors en utilisant les deux premières équations de (5.5) on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= \text{rot } \mathbf{E} \\ &= \mathbf{rot} \text{ rot } \mathbf{E} \\ &= \nabla \rho - \Delta \mathbf{E} \end{aligned}$$

d'où l'obtention de la première équation de (5.6). Si $\text{div } \mathbf{E} = \rho$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$ alors $\text{div } \mathbf{E} = \rho$ sur $\partial\Omega$. De même si $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ dans $\mathcal{C}(\Omega)$ alors $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ sur $\partial\Omega$. Montrons maintenant que (5.6) \implies (5.5). En utilisant la relation (5.7) la première équation de (5.6) se réécrit

$$\mathbf{rot} \text{ rot } \mathbf{E} = \nabla(\text{div } \mathbf{E} - \rho). \quad (5.8)$$

Soit \mathbf{F} une fonction test appartenant à $\mathbf{H}(\text{rot}, \text{div}; \Omega) = \mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) \cap \mathbf{H}(\text{div}; \Omega)$, où

$$\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{rot } \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \}, \quad \mathbf{H}(\text{div}; \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \}$$

avec $\mathbf{L}^2(\Omega) = L^2(\Omega) \otimes L^2(\Omega)$.

Si on multiplie (5.8) par \mathbf{F} , une fonction test, alors en utilisant les formules de Green

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \varphi \, d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{u} \varphi \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\tau} \varphi \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega), \varphi \in H^1(\Omega), \quad (5.9)$$

et

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u} \varphi \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu} \varphi \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}; \Omega), \varphi \in H^1(\Omega), \quad (5.10)$$

avec $\boldsymbol{\nu}$ la normale extérieure à la frontière $\partial\Omega$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{F} \mathbf{rot} \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{rot} \mathbf{E} \, d\Gamma = \\ \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} \operatorname{div} \mathbf{E} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \rho \cdot \mathbf{F} \, d\Omega. \end{aligned} \quad (5.11)$$

En utilisant de nouveau la formule d'intégration par parties (5.10), (5.11) devient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{F} \mathbf{rot} \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} \mathbf{rot} \mathbf{E} \, d\Gamma = \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \rho \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\nu} (\operatorname{div} \mathbf{E} - \rho) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (5.12)$$

En utilisant les relations $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$ sur $\partial\Omega$ et $\mathbf{rot} \mathbf{E} = 0$ sur $\partial\Omega$ on obtient finalement

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{F} \mathbf{rot} \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{E} \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \rho \, d\Omega \quad (5.13)$$

Si $\mathbf{F} = \nabla \psi$, avec $\psi \in H^2(\Omega)$ alors (5.13) devient

$$\int_{\Omega} \Delta \psi (\operatorname{div} \mathbf{E} - \rho) \, d\Omega = 0 \implies \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho \text{ dans } L^2(\Omega).$$

Si $\mathbf{F} = \mathbf{rot} \varphi$, avec $\varphi \in H^2(\Omega)$ alors (5.12) devient

$$\int_{\Omega} \Delta \varphi \mathbf{rot} \mathbf{E} \, d\Omega = 0 \implies \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0 \text{ dans } L^2(\Omega).$$

■

Pour résoudre numériquement le problème (5.6), on mettra en oeuvre une méthode d'éléments finis HR, NC1, HCTR ou HCTC à partir de la formulation variationnelle suivante qui consiste à trouver $\mathbf{E} \in \mathbf{X}$ où

$$\mathbf{X} = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \otimes H^1(\Omega), \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \partial_s(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

avec s abscisse curviligne tel que

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{F} \mathbf{rot} \mathbf{E} \, d\Omega + \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{E} \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \rho \, d\Omega, \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \operatorname{div}; \Omega) \quad (5.14)$$

Remarque 47 On remarque qu'en utilisant des éléments finis qui font intervenir la valeur de l'inconnue et de ses dérivées partielles alors on obtiendra à la fois \mathbf{E} et $\nabla \mathbf{E}$.

5.3.2.2 Conditions aux limites

L'utilisation d'éléments de type Hermite implique l'application des conditions aux limites

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad \partial_s(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

La résolution du système linéaire issu de la formulation variationnelle (5.14) se

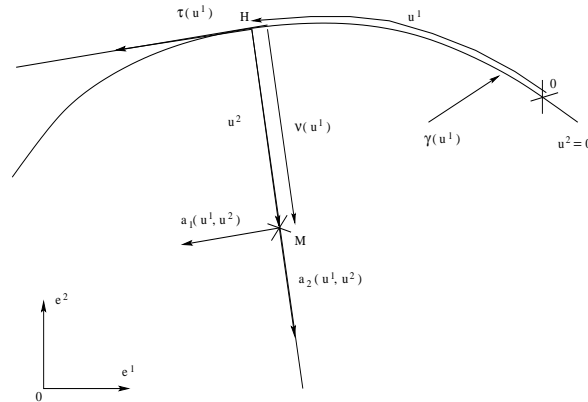


FIG. 5.1 – Changement de variables

fait dans le repère cartésien et dans la base $(e_1(x^1, x^2), e_2(x^1, x^2))$ où (x^1, x^2) sont les coordonnées Cartésiennes. Seulement les conditions aux limites sur le champ électrique ne s'expriment pas d'une manière simple dans la base $(e_1(x^1, x^2), e_2(x^1, x^2))$. Par contre elles s'expriment bien dans le repère de Frénet (τ, ν) . On considère le changement local de base $(a_1(u^1, u^2), a_2(u^1, u^2))$ avec $\tau = a_1(u^1, 0)$ et $\nu = a_2(u^1, 0)$. Dans le repère de Frenet, pour un point appartenant à la frontière, les conditions aux limites s'expriment par

$$E^\tau = 0, \quad \partial_{u^1} E^\tau = 0.$$

Soit

$$N_{fr} = \{\text{ensemble des points appartenant à la frontière}\}.$$

Alors pour tout $i \in N_{fr}$ le vecteur inconnu Λ_i qui a pour expression dans la base $(e_1(x^1, x^2), e_2(x^1, x^2))$

$$\Lambda_i = (E_i^{x^1}, E_i^{x^2}, \partial_{x^1} E_i^{x^1}, \partial_{x^2} E_i^{x^1}, \partial_{x^1} E_i^{x^2}, \partial_{x^2} E_i^{x^2})^T$$

devient dans la base $(\tau, \nu) = (a_1(u^1, 0), a_2(u^1, 0))$ le vecteur inconnu Ξ_i qui à pour expression

$$\Xi_i = (E_i^\tau, E_i^\nu, \partial_{u^1} E_i^\tau, \partial_{u^2} E_i^\tau, \partial_{u^1} E_i^\nu, \partial_{u^2} E_i^\nu)^T.$$

Il faut donc chercher la matrice de transformation R_i qui permet le passage de Ξ_i à Λ_i , c'est-à-dire de telle sorte que l'on ait

$$\Lambda_i = R_i \Xi_i, \quad i \in N_{fr}.$$

Le changement global s'écrit alors

$$\Lambda = R \Xi.$$

où

$$R = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Id_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

La matrice Id_6 est la matrice identité 6×6 et représente la transformation identité pour les points se trouvant à l'intérieur du domaine. Le système linéaire initial

$$(K_{\langle \text{rot}, \text{rot} \rangle} + M_{\langle \text{div}, \text{div} \rangle}) \Lambda = L_{\text{div}} F_\rho$$

où $K_{\langle \text{rot}, \text{rot} \rangle}$, $M_{\langle \text{div}, \text{div} \rangle}$ et L_{div} représentent respectivement une approximation des formes bilinéaires

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{rot}, \text{rot}} = \int_{\Omega} \text{rot}(\cdot) \text{rot}(\cdot) d\Omega, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{div}, \text{div}} = \int_{\Omega} \text{div}(\cdot) \text{div}(\cdot) d\Omega,$$

et de la forme linéaire

$$\mathcal{L}_{\text{div}}(\cdot) = \int_{\Omega} \rho \text{div}(\cdot) d\Omega,$$

devient

$$R^T (K_{\langle \text{rot}, \text{rot} \rangle} + M_{\langle \text{div}, \text{div} \rangle}) R \Xi = R^T L_{\text{div}} F_\rho.$$

Maintenant il reste à déterminer R_i . Pour cela on utilise le calcul tensoriel et le fait que la différentielle absolue dE ne dépend d'aucune base. Tout d'abord calculons les composantes covariantes a_i et les composantes contravariantes a^i des vecteurs de base. Un point x peut s'exprimer par la paramétrisation suivante $x = M(u^1, u^2) = \gamma(u^1) + u^2 \nu(u^1)$. Alors par définition on a

$$a_i = \frac{\partial x}{\partial u^i} = \frac{\partial M}{\partial u^i} \text{ et } a^i a_j = \delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (5.15)$$

En utilisant les relations classiques dans le repère de Frénet

$$\frac{\partial \gamma}{\partial u^1}(u^1) = \tau(u^1), \quad \frac{\partial \tau}{\partial u^1}(u^1) = K(u^1) \nu(u^1), \quad \frac{\partial \nu}{\partial u^1}(u^1) = -K(u^1) \tau(u^1) \quad (5.16)$$

où $K(u^1) = 1/\mathfrak{R}_c(u^1)$ est la courbure (et \mathfrak{R}_c le rayon de courbure) et les relations (5.15), on obtient

$$\begin{aligned} a_1(u^1, u^2) &= (1 - u^2 K(u^1)) \tau(u^1) \\ a_2(u^1, u^2) &= \nu(u^1) \\ a^1(u^1, u^2) &= (1 - u^2 K(u^1))^{-1} \tau(u^1) \\ a^2(u^1, u^2) &= \nu(u^1) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Maintenant cherchons à exprimer les matrices de passages Λ_i^k et V_k^l telles que

$$a_i = \Lambda_i^k e_k \text{ et } e_k = V_k^l a_l.$$

Par définition on a

$$\Lambda_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial u^i}, \quad V_k^l = \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \text{ et } \Lambda_i^k V_k^l = \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} = \delta_i^l,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} = \tau_1, \quad \frac{\partial x^1}{\partial u^2} = \nu_1, \quad \frac{\partial x^2}{\partial u^1} = \tau_2, \quad \frac{\partial x^2}{\partial u^2} = \nu_2, \\ \frac{\partial u^1}{\partial x^1} = \tau_1, \quad \frac{\partial u^1}{\partial x^2} = \tau_2, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^1} = \nu_1, \quad \frac{\partial u^2}{\partial x^2} = \nu_2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

où $\tau = \tau_1 e_1 + \tau_2 e_2$ et $\nu = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2$.

D'une part on a

$$E = E^\alpha a_\alpha$$

d'où l'expression de la différentielle absolue dE

$$dE = D_u E^\alpha a_\alpha = D_{u^\beta} E^{u^\alpha} du^\beta a_\alpha \quad (5.19)$$

où la dérivée covariante $D_{u^\beta} E^{u^\alpha}$, s'écrit

$$D_{u^\beta} E^{u^\alpha} = \frac{\partial E^\alpha}{\partial u^\beta} + E^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha$$

avec $\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha$ le symbole de Christoffel défini par

$$\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha = \frac{\partial a_\sigma}{\partial u^\beta} \cdot a^\alpha.$$

Remarquons que les symboles de Christoffel sont symétriques c'est-à-dire $\Gamma_{\beta\sigma}^\alpha = \Gamma_{\sigma\beta}^\alpha$. D'autre part on a

$$E = E^{x^i} e_i$$

d'où l'expression de la différentielle absolue dE

$$dE = D_x E^{x^j} e_j = D_{x^i} E^{x^j} dx^i e_j = \partial_{x^i} E^{x^j} dx^i e_j. \quad (5.20)$$

En utilisant le changement de variables

$$a_\alpha = \Lambda_\alpha^j e_j = \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} e_j, \quad du^\beta = V_i^\beta dx^i = \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} dx^i$$

et en égalisant (5.19) et (5.20) on obtient

$$\partial_{x^i} E^{x^j} = D_{u^\beta} E^{u^\alpha} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha} \quad (5.21)$$

A partir des notations

$$\begin{aligned} E^1(u^1, 0) &= E^\tau, \quad E^2(u^1, 0) = E^\nu, \quad \partial_{u^1} E^1(u^1, 0) = \partial_{u^1} E^\tau, \\ \partial_{u^2} E^1(u^1, 0) &= \partial_{u^2} E^\tau, \quad \partial_{u^1} E^2(u^1, 0) = \partial_{u^1} E^\nu, \quad \partial_{u^2} E^2(u^1, 0) = \partial_{u^2} E^\nu. \end{aligned}$$

et des relations (5.21) et (5.18) on trouve pour R_i

$$R_i(\nu_i, \mathfrak{R}_{c_i}) = \begin{pmatrix} \nu_{y,i} & \nu_{x,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{x,i} & \nu_{y,i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu_{y,i}^2}{\mathfrak{R}_{c_i}} & \nu_{y,i}^2 & \nu_{x,i}\nu_{y,i} & \nu_{x,i}\nu_{y,i} & \nu_{x,i}^2 \\ -\frac{1}{\mathfrak{R}_{c_i}} & \frac{\nu_{x,i}\nu_{y,i}}{\mathfrak{R}_{c_i}} & -\nu_{x,i}\nu_{y,i} & \nu_{y,i}^2 & -\nu_{x,i}^2 & \nu_{x,i}\nu_{y,i} \\ \frac{1}{\mathfrak{R}_{c_i}} & \frac{\nu_{x,i}\nu_{y,i}}{\mathfrak{R}_{c_i}} & -\nu_{x,i}\nu_{y,i} & -\nu_{x,i}^2 & \nu_{y,i}^2 & \nu_{x,i}\nu_{y,i} \\ 0 & -\frac{\nu_{x,i}^2}{\mathfrak{R}_{c_i}} & \nu_{x,i}^2 & -\nu_{x,i}\nu_{y,i} & -\nu_{x,i}\nu_{y,i} & \nu_{y,i}^2 \end{pmatrix}$$

5.3.3 Résolution des systèmes linéaires

Les systèmes linéaires issus des méthodes d'éléments finis (obtenus après assemblage des matrices élémentaires) sont généralement très creux. Dans un souci d'économie de la capacité mémoire et de performance calcul on utilise un stockage creux pour représenter la structures des matrices (stockage "morse"). Pour la résolution des systèmes linéaires on a envisagé deux types de méthodes : des méthodes directes comme la décomposition LU et des méthodes itératives comme la méthode du gradient conjugué préconditionné (voir [135]). Afin de prendre en compte les conditions aux limites on envisage deux méthodes. La première consiste à restructurer la matrice de manière à supprimer les équations correspondant aux degrés de liberté imposés. Cette méthode à l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du systèmes. Cependant comme la restructuration de A est une opération coûteuse il vaut mieux ne pas assembler les équations inutiles. La seconde méthode consiste à pénaliser certains termes diagonaux de manière à ce qu'ils deviennent dominants. Soit x_i une inconnue du système linéaire $Ax = f$, A une matrice de dimension $n \times n$, x et f deux vecteurs de dimension n . On prend en compte la condition aux limites $x_i = x_i^*$ en remplaçant A_{ii} par $A_{ii} + \gamma$,

γ étant un nombre très grand par rapport à tous les A_{ij} , et le terme f_i par γx_i^* . Alors l'équation i s'écrit

$$\gamma x_i + \left(\sum_{j=1}^n A_{ij} x_j \right) = \gamma x_i^*.$$

et admet la solution approchée $x_i = x_i^*$ si $\gamma x_i^* \gg \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j$. En pratique, si la précision du calculateur est de α chiffres décimaux, en choisissant $\gamma = 10^\alpha \cdot \max\{|A_{ij}|\}$ l'erreur sur x_i est du même ordre que la précision de l'ordinateur. Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre car il suffit de changer deux termes A_{ii} et f_i , mais elle peut poser des problèmes lorsque la matrice A est mal conditionnée et lorsque certaines composantes de x sont grandes.

5.4 Résultats numériques

On présente ici deux cas test. Le premier est l'amortissement Landau dans le régime linéaire. Le second est la propagation d'un faisceau de particules chargées dans l'approximation paraxiale avec focalisation uniforme où le profil de la fonction de distribution initiale est une gaussienne dans l'espace des phases.

5.4.1 Amortissement Landau linéaire

Ici on résout le système

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} f + \mathbf{E}_s \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0,$$

$$\mathbf{E}_s(t, x, y) = -\nabla \phi(t, x, y), \quad -\Delta \phi(t, x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(t, x, y, v_x, v_y) dv_x dv_y - 1.$$

où $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ et $\mathbf{E}_s = (E_{x_s}, E_{y_s})$.

La donnée initiale est

$$f(0, x, y, v_x, v_y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}} (1 + \alpha \cos(k_x x) \cos(k_y y)),$$

$$\forall (x, y) \in [0, L_x] \times [0, L_y], \quad (v_x, v_y) \in [-v_{\max}, v_{\max}]^2$$

où $\alpha = 0.05$, $v_{\max} = 7.5$, $\Delta t = 1/8$ et $T_{final} = 22\omega_p^{-1}$. Les nombres d'ondes k_x et k_y valent 0.5. Les dimensions de la boîte sont prises en fonction du nombre d'onde de telle sorte que $L_x = L_y = 2\pi/k_x = 2\pi/k_y = 4\pi$. La discrétisation dans l'espace physique est de 7938 triangles (~ 64 points en x par 64 points en y) et de 32258 triangles rectangles dans l'espace des vitesse (~ 128 points en x par 128 points en y). Le schéma utilisé est HCTC en (x, y) et NC1 en (v_x, v_y) . Les évolutions des deux composantes du champ électrique sont identiques car la donnée initiale est symétrique par rapport aux axes x et y . Le mode $\hat{E}_x(k_x = 0.5, k_y = 0.5)$ qui véhicule pratiquement toute l'énergie électrique décroît exponentiellement avec un taux d'amortissement $\gamma = -0.394$ et une pulsation $\omega = 1.69$, comme le prédit la théorie linéaire de Landau.

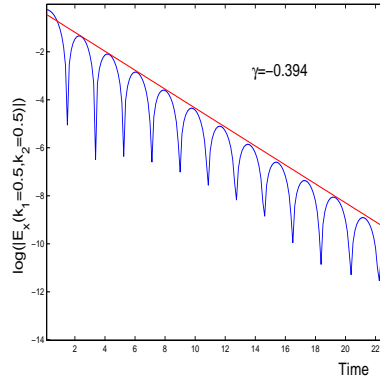


FIG. 5.2 – Evolution du mode $\widehat{E}_x(k_x = 0.5, k_y = 0.5)$

5.4.2 Faisceau Gaussien

La donnée initiale est

$$f_0(x, y, v_x, v_y) = \frac{n_0}{(2\pi v_{th}^2)(\pi a^2)} e^{-\frac{v_x^2 + v_y^2}{2v_{th}^2}} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2a^2}}$$

où on fixe $a = 1$. Afin d'avoir un faisceau adapté il nous faut calculer v_{th} , ω_0 , n_0 et R_{rms} à partir du concept de faisceaux équivalents. Pour cela on considère la distribution K-V qui est une distribution surfacique de la forme

$$f_0(x, y, x', y') = \delta \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{a'^2} - 1 \right) \quad (5.22)$$

La distribution K-V est une solution stationnaire de l'équation de Vlasov pour laquelle, le champ électrique auto-consistant est linéaire. Le champ électrique total s'écrit

$$\mathbf{E}_s(t, \mathbf{x}) + \mathbf{E}_a(t, \mathbf{x}) = -\omega^2 \mathbf{x}.$$

où \mathbf{E}_s est solution de l'équation de Poisson (5.2) et $\mathbf{E}_a = -\omega_0^2 \mathbf{x}$. En posant la dépression du nombre d'onde $\eta = \omega/\omega_0$ (qui correspond à un retard de phase entre les particules), le concept de faisceaux équivalents implique que

$$R^2 = (x_{rms}^f)^2 = \frac{\int_{\mathbb{R}^4} x^2 f' d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'}{\int_{\mathbb{R}^4} f' d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'} = (x_{rms}^{K-V})^2 = \frac{a^2}{4},$$

$$R^2 = (y_{rms}^f)^2 = \frac{\int_{\mathbb{R}^4} y^2 f' d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'}{\int_{\mathbb{R}^4} f' d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'} = (y_{rms}^{K-V})^2 = \frac{a^2}{4},$$

$$\frac{v_{th}^2}{u_z^2} = (v_{x_{rms}}^f)^2 = \frac{\int_{\mathbb{R}^4} x'^2 f' d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'}{\int_{\mathbb{R}^4} f' d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'} = (v_{x_{rms}}^{K-V})^2 = \frac{a'^2}{4} = \frac{(ka)^2}{4},$$

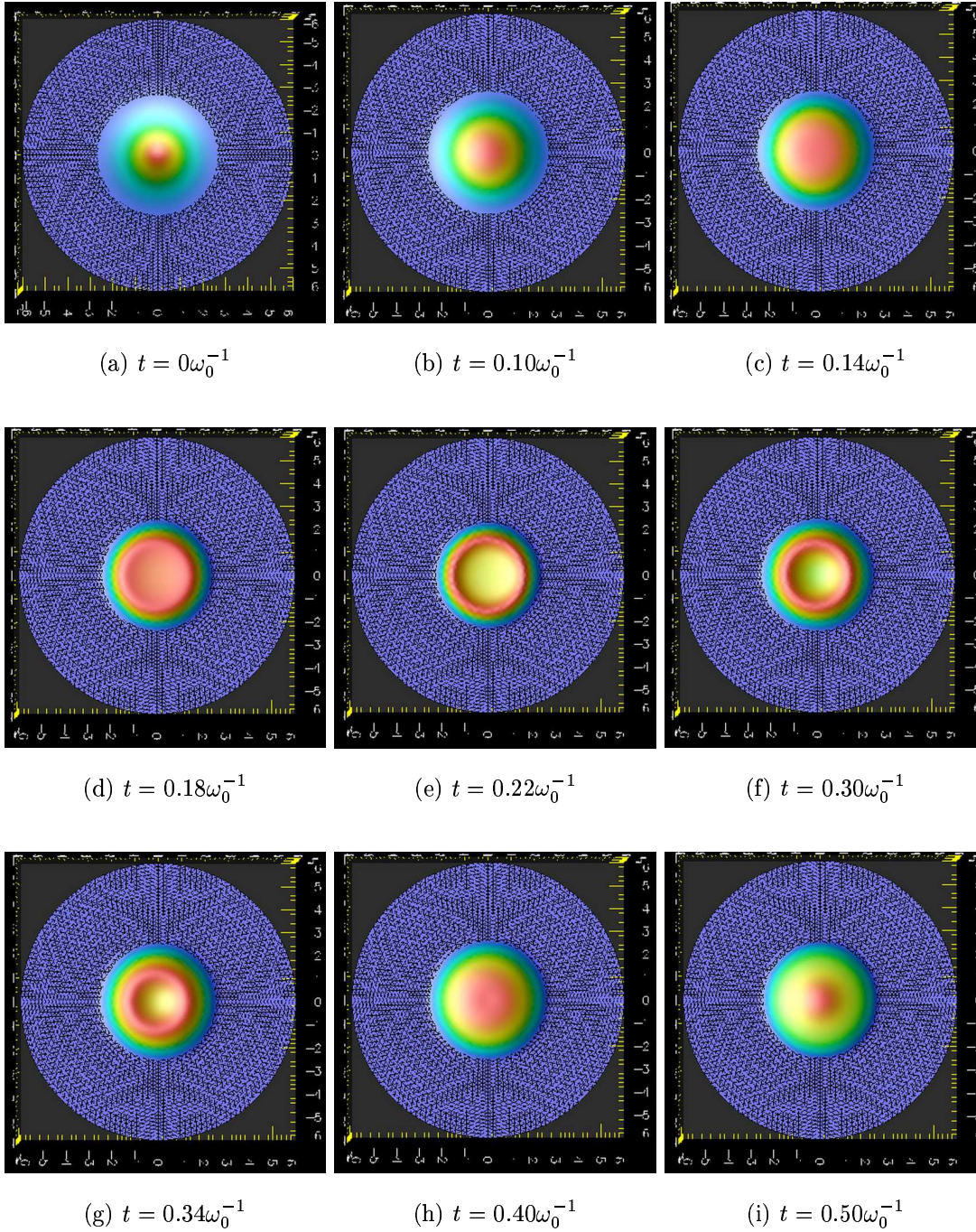
$$\frac{v_{th}^2}{u_z^2} = (v_{y_{rms}}^f)^2 = \frac{\int_{\mathbb{R}^4} y'^2 f' d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'}{\int_{\mathbb{R}^4} f' d\mathbf{x}' d\mathbf{v}'} = (v_{y_{rms}}^{K-V})^2 = \frac{a'^2}{4} = \frac{(ka)^2}{4},$$

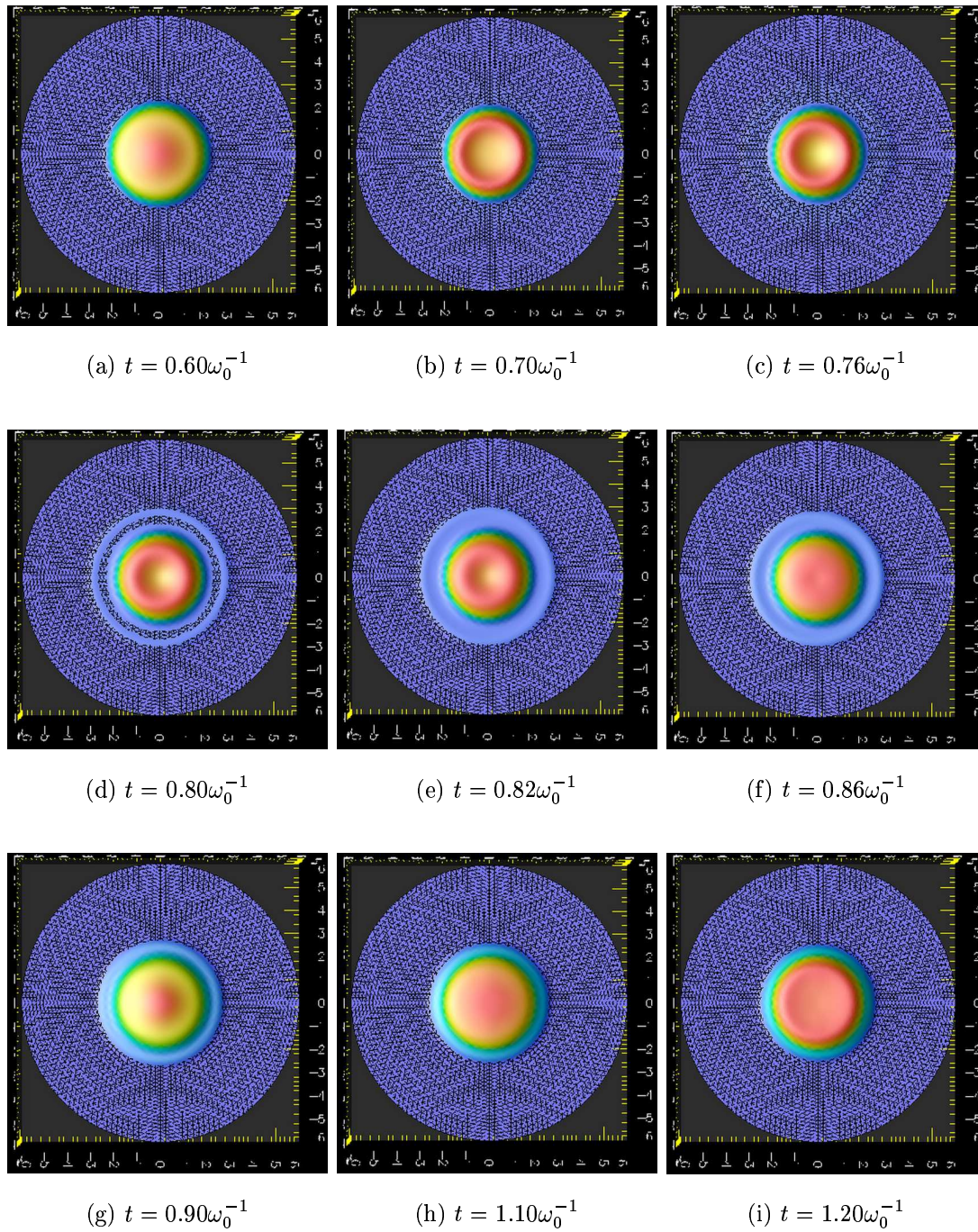
où $\omega = ku_z$. En fixant $\eta = 1/4$ et $v_{th} = 1$ et en remarquant que $\omega_0 = \sqrt{\frac{n_0}{2(1-\eta^2)}}$ reste valable car dans une chaîne de focalisation uniforme le faisceau K-V (5.22) est adapté, tous les paramètres du faisceau sont déterminés.

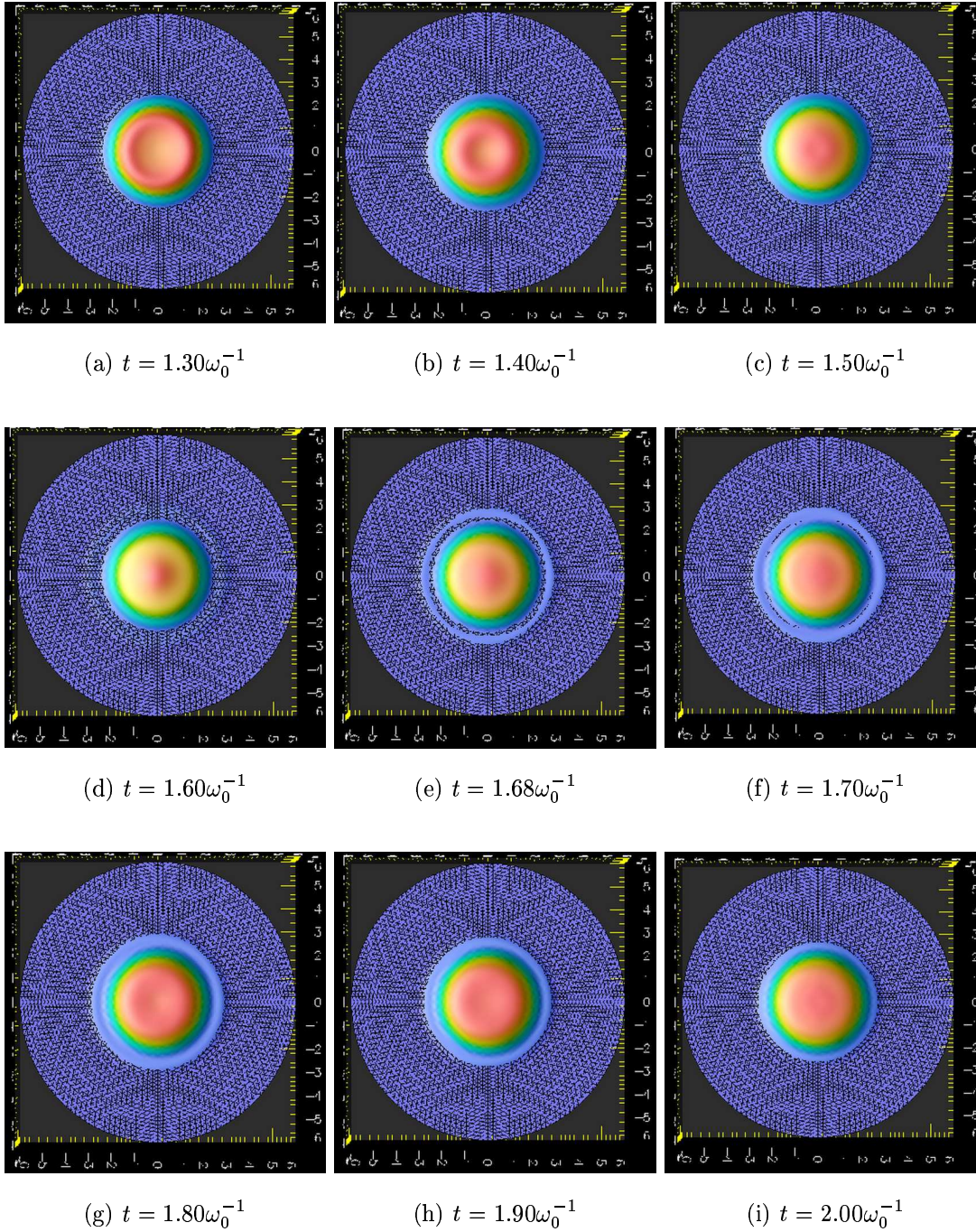
A partir des figures 5.3, 5.4 et 5.5, on remarque que le faisceau commence par se creuser, ce qui a pour effet de créer de fortes densités à la périphérie du faisceau. Ensuite les particules se propagent vers l'intérieur du faisceau créant ainsi une zone de forte densité au coeur du faisceau. Ainsi se crée une onde de charge d'espace qui se propage de l'intérieur du faisceau vers l'extérieur et inversement. On remarque autour des temps $t = 0.80\omega_0^{-1}$ et $t = 1.68\omega_0^{-1}$, l'apparition périodique d'un halo, couronne de particules de faible densité qui entoure le coeur du faisceau. L'étude de la formation du halo est un problème important en physique des faisceaux car les particules rapides du halo qui frappent la paroi peuvent créer de la radioactivité. Le halo apparaît autour de $r = 2.6$ et sa densité représente 3% à 5% de celle du coeur du faisceau. Comme la fonction de distribution initiale f_0 est invariante par rotation autour de l'axe z , une propriété de la solution du modèle paraxial est que la fonction de distribution f doit rester axisymétrique au cours du temps. Numériquement on observe bien le respect de la propriété d'invariance par rotation.

5.5 Conclusion

On a présenté dans ce chapitre une extension des méthodes numériques exposées au chapitre 2 au cas paraxial. Si on a traité ici un cas simple de focalisation (focalisation dans une chaîne uniforme) le cas paraxial non axisymétrique permet cependant de traiter la propagation de faisceaux de particules dans des chaînes de focalisation plus réalistes comme les chaînes de focalisation périodiques ou FODO (par quadrupole électrique ou magnétique) qui consiste en une succession de focalisations dans une direction et de défocalisations dans l'autre direction et inversement (cf [175]).

FIG. 5.3 – Evolution de la densité $\rho(t, x, y)$

FIG. 5.4 – Evolution de la densité $\rho(t, x, y)$

FIG. 5.5 – Evolution de la densité $\rho(t, x, y)$

Chapitre 6

Méthodes adaptatives pour l'équation de Vlasov basées sur une analyse multi-résolution

Sommaire

6.1	introduction	216
6.2	Analyse multi-résolution	216
6.2.1	Cas mono-dimensionnel	217
6.2.2	Cas multi-dimensionnel	219
6.3	Les algorithmes	220
6.3.1	L'algorithme non adaptatif	221
6.3.2	L'algorithme adaptatif	221
6.3.3	Mise en oeuvre	222
6.4	Résultats numériques	225
6.4.1	Le cylindre fendu tournant	226
6.4.2	Le faisceau Gaussien	229
6.4.3	Le faisceau semi-Gaussien	233
6.4.4	Temps de calcul	234
6.5	Conclusion	237

6.1 introduction

Ce chapitre est issu d'une collaboration initiée au Centre d'Été de Mathématique et Recherche Avancée en Calcul Scientifique (CEMRACS 2001) de Luminy (Marseille) avec l'équipe d'analyse numérique de l'Institut de Recherche en Mathématiques Avancées de Strasbourg (IRMA) (Eric Sonnendrücker, Michaël Gutnic, Francis Filbet, Ioana Paun).

Si les méthodes Euleriennes (sur un maillage de l'espace des phases) sont plus précises, elles restent néanmoins peu efficaces dans les cas réalistes lorsqu'elles utilisent une grille uniforme. En effet la structure de l'équation de Vlasov en six dimensions est très proche de la structure des équations d'Euler incompressibles. L'équation de Vlasov possède intrinsèquement un caractère turbulent. Aussi l'équation de Vlasov met en jeu une gamme d'échelles de phénomènes physiques très variées. Lorsque la fréquence associée aux structures microscopiques, qui en l'absence de mécanismes physiques de relaxation (comme les opérateurs de collisions) ne cessent de se développer, devient plus grande que celle que la discrétisation est capable de reproduire, le système physique perd de l'information et la fonction de distribution est régularisée. Le maillage tient lieu de mécanismes de relaxation et joue le rôle d'un filtre passe-bas qui ne laisse passer que les basses fréquences. La perte d'information au niveau microscopique peut avoir des conséquences néfastes au niveau macroscopique car *a priori*, il y a une interaction entre les différentes échelles. L'idée est donc de développer des méthodes numériques qui prennent en compte le plus grand nombre d'échelles possible. L'utilisation des méthodes de raffinement adaptatif ou évolutif de maillage semble être une bonne stratégie pour suivre le développement des structures microscopiques et par conséquent donner une bonne approximation des structures cohérentes et organisées qui émergent au niveau macroscopique. Dans la pratique on ne peut évidemment pas prendre des mailles aussi petites que l'on veut car on est limité par les capacités de calcul. De plus au bout d'un certain temps, si l'on veut décrire correctement les phénomènes physiques on est obligé de prendre en compte les collisions entre particules qui ont tendance à supprimer les structures microscopiques et à régulariser la fonction de distribution.

6.2 Analyse multi-résolution

Une analyse multi-résolution consiste à exprimer une fonction par son approximation à une échelle grossière plus une somme des détails que l'on ajoute à chaque échelle intermédiaire. L'analyse multi-résolution par ondelettes semble très bien adaptée car la structure du maillage et la représentation multi-échelle de la fonction de distribution sont directement reliées. Par ailleurs pour intégrer l'équation de Vlasov on utilisera une méthode semi-Lagrangienne avec splitting d'opérateur. La méthode semi-lagrangienne se décompose en une étape d'advection et une étape d'interpolation. L'interpolation peut être réalisée sur un maillage en utilisant des polynômes d'interpolation de Lagrange symétriques d'ordre élevé sur des grilles par exemple. Il semble donc assez naturel de construire

une analyse multi-résolution basée sur des polynômes d'interpolation de Lagrange. On décrira cette analyse multi-résolution en mettant en valeur les propriétés qui permettent de travailler de manière naturelle sur des maillages adaptatifs. En premier lieu on considèrera le problème en dimension une, où le domaine de calcul est \mathbb{R} tout entier. Ensuite on envisagera la généralisation au cas 2D que l'on décrira brièvement en précisant l'extension possible à nD.

6.2.1 Cas mono-dimensionnel

Etant donné $j \in \mathbb{Z}$, on considère le maillage uniforme G^j de \mathbb{R} de pas 2^{-j} . Les points du maillage sont situés aux abscisses $x_k^j = k 2^{-j}$. On définit ainsi une suite infinie de maillages notée $\{G_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, où j est le niveau du maillage. Pour passer d'un niveau donné au niveau supérieur nous définissons un opérateur de prédiction et pour passer au niveau inférieur nous définissons un opérateur de projection de la manière suivante. Considérons les deux maillages G_j, G_{j+1} et notons $\{c_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et $\{c_k^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ les valeurs d'une fonction donnée aux points respectifs des deux maillages.

On définit alors l'opérateur de projection

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{j+1}^j : G_{j+1} &\longmapsto G_j, \\ \{c_k^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \{c_k^j \mid c_k^j = c_{2k}^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

qui est simplement un opérateur de restriction et l'opérateur de prédiction

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j^{j+1} : G_j &\longmapsto G_{j+1}, \\ \{c_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \{c_k^{j+1} \mid c_k^{j+1} = P_{2N-1}(x_k^{j+1})\}_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

où P_{2N-1} désigne le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré impair $2N-1$ centré au point x_{2k+1}^{j+1} , c'est-à-dire tel que $P_{2N-1}(x_{k+l}^j) = c_{k+l}^j$ pour $-N+1 \leq l \leq N$. Par conséquent on a $c_{2k}^{j+1} = c_k^j$.

En utilisant l'opérateur de prédiction que nous venons de définir, on fait correspondre à chaque coefficient c_k^j , une fonction φ_k^j . Ces fonctions sont déterminées de telle sorte que

$$\varphi_k^j(x_{k'}^j) = \delta_{k,k'}, \quad \text{et} \quad c_k^{j+1} = \sum_l c_l^j \varphi_k^j(x_k^{j+1})$$

où $\delta_{k,k'}$ est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $k = k'$ et 0 sinon. La valeur de φ_k^j en un point quelconque de la droite réelle est obtenue en appliquant, éventuellement une infinité de fois, l'opérateur de prédiction. Dans la terminologie des ondelettes, les φ_k^j sont appelées fonctions d'échelle. Nous noterons $\varphi = \varphi_0^0$ et on remarquera que

$$\varphi_k^j(\cdot) = \varphi(2^j \cdot - k).$$

On vérifie facilement que les fonctions d'échelle ont les propriétés suivantes :

- ★ Support compact : le support de φ est contenu dans $[-N+1, N-1]$.
- ★ Interpolation : par construction $\varphi(x)$ est interpolante dans le sens où $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(k) = 0$ si $k \neq 0$.

- ★ Reproduction polynômiale : tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $N - 1$ sont reproduits de manière exacte comme combinaison linéaire des φ_k^0

$$x^i = \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^i \varphi(x - k), \quad 0 \leq i \leq N - 1.$$

- ★ Changement d'échelle : on peut exprimer φ à partir de la relation d'échelle

$$\varphi(\cdot) = \sum_{l=-N+1}^{N-1} h_l \varphi(2 \cdot - l).$$

Puisque $c_k^{j+1} = \sum_l c_l^j \varphi_k^j(x_k^{j+1})$ l'opérateur de prédiction s'écrit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_j^{j+1} : G_j &\longmapsto G_{j+1}, \\ \{c_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \{c_k^{j+1} \mid c_k^{j+1} = \sum_l h_{k-2l} c_l^j\}_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

avec $h_{2l} = \delta_{0,l}$.

On construit alors une suite d'espaces fermés que nous noterons V_j , dont une base est constituée par les $\{\varphi_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$. Cette suite définit une analyse multi-résolution de $L^2(\mathbb{R})$, *i.e.* elle vérifie les propriétés suivantes :

- ★ $\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_n \subset \dots \subset L^2(\mathbb{R})$.
- ★ $\cap V_j = \{0\}$, $\overline{\cup V_j} = L^2(\mathbb{R})$.
- ★ $f \in V_j \leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$.
- ★ $\exists \varphi$ (fonction d'échelle) telle que $\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de V_0 .

Comme $V_j \subset V_{j+1}$ fermé, on peut chercher un supplémentaire de V_j dans V_{j+1} que l'on appellera espace de détails et que l'on notera W_j

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

La construction de W_j se fait de la façon suivante : un élément de V_{j+1} est caractérisé par la suite $\{c_k^{j+1}\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et par construction on a $c_k^j = c_{2k}^{j+1}$. On définit

$$d_k^j = c_{2k+1}^{j+1} - P_{2N-1}(x_{2k+1}^{j+1}),$$

où P_{2N-1} est le polynôme d'interpolation de Lagrange permettant de calculer la valeur d'un élément de V_j au point (x_{2k+1}^{j+1}) .

Le coefficient d_k^j représente exactement la différence entre la valeur dans V_{j+1} et la valeur prédite dans V_j . Finalement, tout élément de V_{j+1} est également caractérisé par les deux suites $\{c_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de valeurs dans V_j et $\{d_k^j\}_{k \in \mathbb{Z}}$ de détails dans W_j . De plus cette manière de construire W_j est particulièrement intéressante pour le raffinement adaptatif car d_k^j sera petit aux endroits où la prédiction à partir de V_j est bonne et grand ailleurs, ce qui nous donne un critère naturel de raffinement. On fait correspondre à chaque coefficient d_k^j une fonction ψ_k^j .

En effet, il existe une fonction ψ , appelée ondelette (cf [58], [150]), telle que $\{\psi_k^j = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base de W_j . L'orthogonalité de la somme $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ conduit au choix

$$\psi_k^j = \varphi_{2k+1}^{j+1}.$$

En pratique, pour le raffinement adaptatif, nous choisissons de décomposer une fonction du niveau le plus fin j_1 au niveau le plus grossier j_0 . On utilise pour cela

$$V_{j_1} = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \cdots \oplus W_{j_1-1}.$$

Une fonction $f \in V_{j_1}$ peut alors être décomposée comme

$$f(x) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} c_l^{j_0} \varphi_l^{j_0}(x) + \sum_{j=j_0}^{j_1-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} d_l^j \psi_l^j(x),$$

où les $\{c_l^{j_0}\}_{l \in \mathbb{Z}}$ sont les coefficients sur le maillage grossier et les $\{d_l^j\}_{l \in \mathbb{Z}}$ les détails aux différents niveaux intermédiaires.

6.2.2 Cas multi-dimensionnel

En deux dimensions, l'opérateur de prédiction qui permet de définir l'analyse multi-résolution est construit par produit tensoriel à partir de l'opérateur 1D. En pratique il faut considérer trois cas distincts (voir la figure 6.1 pour les notations) :

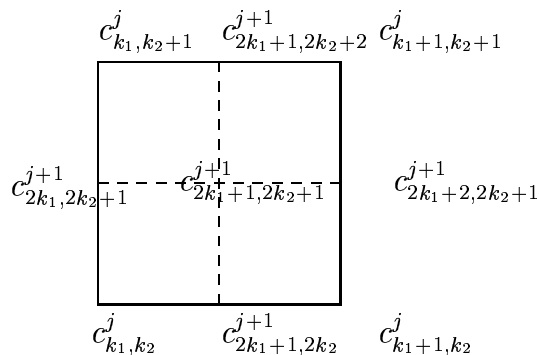


FIG. 6.1 – Raffinement du maillage en 2D.

1. Raffinement en x (correspond aux points $c_{2k_1+1, 2k_2}^{j+1}$ et $c_{2k_1+1, 2k_2+2}^{j+1}$) : on utilise l'opérateur de prédiction 1D en x pour k_2 fixé.
2. Raffinement en v (correspond aux points $c_{2k_1, 2k_2+1}^{j+1}$ et $c_{2k_1+2, 2k_2+1}^{j+1}$) : on utilise l'opérateur de prédiction 1D en v pour k_1 fixé.
3. Raffinement en v et x (correspond au point $c_{2k_1+1, 2k_2+1}^{j+1}$) : on utilise d'abord l'opérateur de prédiction 1D en v pour k_1 fixé afin de construire les points nécessaires pour appliquer l'opérateur de prédiction 1D en x pour k_2 fixé qu'on applique ensuite.

Les bases d'ondelettes correspondantes sont respectivement du type $\psi(x)\varphi(v)$, $\varphi(x)\psi(v)$ et $\psi(x)\psi(v)$ où φ et ψ sont respectivement la fonction d'échelle et l'ondelette 1D. En effet, on a une décomposition de type

$$V_{j+1} \otimes V_{j+1} = (V_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j).$$

On obtient alors en 2D une décomposition en ondelettes de la forme

$$f(x, v) = \sum_{k_1, k_2} \left(c_{k_1, k_2}^{j_0} \varphi_{k_1}^{j_0}(x) \varphi_{k_2}^{j_0}(v) + \sum_{j_0}^{j_1-1} \left(d_{k_1, k_2}^{r, ow, j} \psi_{k_1}^j(x) \varphi_{k_2}^j(v) + d_{k_1, k_2}^{col, j} \varphi_{k_1}^j(x) \psi_{k_2}^j(v) + d_{k_1, k_2}^{mid, j} \psi_{k_1}^j(x) \psi_{k_2}^j(v) \right) \right). \quad (6.1)$$

Une analyse multi-résolution multi-dimensionnelle de dimension n peut donc se construire à partir d'une analyse multi-résolution mono-dimensionnelle par produit tensoriel

$$\mathcal{V}_j = (\otimes)^n V_j.$$

En définissant $\mathcal{I} = \{I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n, I \neq 0, i_k \in \{0, 1\} \forall k\}$, on a alors la formule

$$\mathcal{V}_j = \mathcal{V}_{j-1} \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \sum_{I \in \mathcal{I}} \mathcal{W}_{j-1}^I,$$

où $\mathcal{W}_{j-1}^I = U_{j-1}^{i_1} \otimes \dots \otimes U_{j-1}^{i_n}$ avec $U_{j-1}^i = \begin{cases} V_{j-1} & \text{si } i = 0, \\ W_{j-1} & \text{si } i = 1. \end{cases}$

La décomposition d'une fonction f située à l'échelle j_1 s'exprime sous la forme

$$f(X) = \sum_K C_K^{j_0} \Phi_K^{0, j_0}(X) + \sum_{j=j_0}^{j_1-1} \sum_{I \in \mathcal{I}} \sum_K D_K^{I, j} \Phi_K^{I, j}(X),$$

où $\Phi_K^{I, j}(X) = \phi_{k_1}^{i_1, j}(x_1) \cdot \phi_{k_2}^{i_2, j}(x_2) \dots \phi_{k_n}^{i_n, j}(x_n)$ avec $\phi_k^{i, j} = \begin{cases} \varphi_k^j & \text{si } i = 0, \\ \psi_k^j & \text{si } i = 1. \end{cases}$

6.3 Les algorithmes

Dans cette section on décrit l'algorithme adaptatif. Pour ce faire on décrit d'abord une version non adaptative de la méthode, puis on y superposera l'algorithme adaptatif.

On choisit les niveaux de résolution j_0 pour le maillage le plus grossier et j_1 pour le maillage le plus fin. Bien que ces niveaux puissent être différents en x et en v , on les considère ici identiques dans un souci de clarté des notations.

On se donne également notre fonction échelle que l'on calcule sur une grille très fine pour pouvoir approcher de façon précise sa valeur en n'importe quel point de l'espace des phases.

6.3.1 L'algorithme non adaptatif

On travaille ici sur le maillage le plus fin correspondant au niveau j_1 en conservant tous les points.

- **Initialisation** : On décompose la condition initiale dans la base d'ondelettes en calculant les coefficients c_{k_1, k_2} de la décomposition dans V_{j_0} pour le maillage grossier et en ajoutant les détails d_{k_1, k_2}^j dans les espaces de détails W_j pour tous les autres niveaux de $j = j_0, \dots, j_1 - 1$.
- **Itérations en temps** :
 - ★ **Advection en x** : on calcule l'origine de la courbe caractéristique se terminant en chaque point du maillage en effectuant un déplacement de $v_j \Delta t$. On calcule alors les nouvelles valeurs de la fonction de distribution, notée f^* , à l'origine des courbes caractéristiques en utilisant la décomposition en ondelettes de f^n identique à (6.1) qui permet de calculer f^n en un point quelconque de l'espace des phases.
 - ★ **Calcul du champ électrique** : on calcule la densité de charge en intégrant f^* par rapport à v , et le champ électrique en résolvant l'équation de Poisson (cette étape disparaît dans le cas linéaire du cylindre tournant où le champ d'advection est connu explicitement).
 - ★ **Advection en v** : on calcule l'origine de la courbe caractéristique se terminant en chaque point du maillage en effectuant un déplacement de $E(t^n, x_i) \Delta t$. On calcule les nouvelles valeurs de la fonction de distribution, notée f^{n+1} , à l'origine des courbes caractéristiques en utilisant la décomposition en ondelettes de f^* comme pour l'étape précédente.

6.3.2 L'algorithme adaptatif

- **Initialisation** : dans la phase d'initialisation, après avoir calculé la décomposition en ondelettes de f_0 , on procède à une compression qui consiste à éliminer les détails inférieurs à un seuil que l'on se fixe. On construit alors une grille adaptative qui contient uniquement les points correspondant aux détails que l'on garde. On note G^0 cette grille. En pratique, si l'un des trois détails $d_{k_1, k_2}^{row, j}$, $d_{k_1, k_2}^{col, j}$, $d_{k_1, k_2}^{mid, j}$ est supérieur au seuil fixé, on ajoute dans la structure G^0 le point $(j - j_0, k_1, k_2)$ et on stocke les trois détails, en mettant à zéro ceux qui sont inférieurs au seuil.
- **Itérations en temps** :
 - ★ **Prédiction avant l'advection en x** : on prédit \tilde{G}^* qui contient les positions des points où les détails seront importants au pas suivant en avançant les courbes caractéristiques associées au transport libre et issues des points de la grille G^n . Pour cela on procède à une advection en x des points de G^n en utilisant un schéma d'Euler. Ensuite, on raffine en ajoutant les points voisins à un niveau plus fin.
 - ★ **Construction d'une grille \hat{G}^*** : la grille \hat{G}^* contient les points où on calculera les valeurs de la fonction de distribution au pas suivant. On construit \hat{G}^* en ajoutant les points de la grille la plus fine (d'échelle 2^{-j_1})

qui sont nécessaires au calcul des coefficients en ondelettes de f^{n+1} aux points de \hat{G}^* .

- ★ **Advection en x** : à l'instar du cas non adaptatif on calcule f^* seulement aux points de \hat{G}^* et cela à partir des détails de G^n .
- ★ **Transformation en ondelettes de f^*** : on calcule les coefficients c_k et d_k aux points de \tilde{G}^* en fonction des valeurs de f^* aux points de \hat{G}^* .
- ★ **Compression** : on élimine les points de \tilde{G}^* où les détails sont inférieurs au seuil fixé ce qui définit une nouvelle grille G^* .
- ★ **Calcul du champ électrique** : on calcule la densité de charge en intégrant f^* par rapport à v , puis le champ électrique en résolvant l'équation de Poisson (cette étape disparaît dans les cas linéaires où le champ d'advection est connu explicitement).
- ★ **Prédiction avant l'advection en v** : on prédit les positions des points où les détails seront importants au pas suivant en avançant les courbes caractéristiques associées au transport accéléré (à partir des valeurs du champ d'accélération calculées à l'étape précédente) et issues des points de la grille G^* . Pour cela on effectue une advection en v des points de G^* en utilisant un schéma d'Euler. Ensuite on raffine, en ajoutant les points voisins à un niveau plus fin. On obtient ainsi la nouvelle grille \tilde{G}^{n+1} .
- ★ **Construction d'une grille \hat{G}^{n+1}** : à l'instar de la construction de la grille \hat{G}^* .
- ★ **Advection en v** : à l'instar du cas non adaptatif on calcule f^{n+1} seulement aux points de \hat{G}^{n+1} et cela à partir des détails de G^* .
- ★ **Transformation en ondelettes de f^{n+1}** : on calcule les coefficients c_k et d_k aux points de \tilde{G}^{n+1} à partir des valeurs de f^{n+1} aux points de \hat{G}^{n+1} .
- ★ **Compression** : G^{n+1} .

Remarque 48 *L'intégration en temps se fait selon un splitting de Lie et conduit formellement à une erreur en temps en $O(\Delta t)$. L'algorithme précédent s'adapte de manière évidente dans le cas du splitting de Strang, dont l'erreur en temps est formellement en $O(\Delta t^2)$.*

6.3.3 Mise en oeuvre

Dans ce paragraphe on détaille l'algorithme présenté ci-dessus.

• Initialisation.

★ **Condition initiale** : f_0 sur la grille fine $\longrightarrow f_0\left(\frac{k_x}{2^{j_1}}, \frac{k_v}{2^{j_1}}\right)$

★ **Décomposition** : $f_0\left(\frac{k_x}{2^{j_1}}, \frac{k_v}{2^{j_1}}\right) \longrightarrow c_{k_1, k_2}^{j_0}, d_{k_1, k_2}^{row, j}, d_{k_1, k_2}^{col, j}, d_{k_1, k_2}^{mid, j}$

Les coefficients de la décomposition en ondelettes sont calculés grâce à la décomposition :

$$\begin{aligned} V_{j+1} \otimes V_{j+1} &= (V_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \\ &= (V_j \otimes V_j) \oplus ((V_{j+1} - V_j) \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes (V_{j+1} - V_j)) \\ &\oplus ((V_{j+1} - V_j) \otimes (V_{j+1} - V_j)) \end{aligned}$$

Le premier terme de la décomposition, $V_{j_0} \otimes V_{j_0}$, implique

$$c_{k_1, k_2}^{j_0} = f_0\left(\frac{k_1}{2^{j_0}}, \frac{k_2}{2^{j_0}}\right). \quad (6.2)$$

Pour chaque niveau j , $j_0 \leq j \leq j_1$, le terme, $(V_{j+1} - V_j) \otimes V_j$, implique

$$d_{k_1, k_2}^{row, j} = f_0\left(\frac{2k_1 + 1}{2^{j+1}}, \frac{2k_2}{2^{j+1}}\right) - \sum_{i=-N+1}^{N+1} h_i \cdot f_0\left(\frac{k_1 + i}{2^j}, \frac{k_2}{2^j}\right), \quad (6.3)$$

le terme, $V_j \otimes (V_{j+1} - V_j)$, implique

$$d_{k_1, k_2}^{col, j} = f_0\left(\frac{2k_1}{2^{j+1}}, \frac{2k_2 + 1}{2^{j+1}}\right) - \sum_{i=-N+1}^{N+1} h_i \cdot f_0\left(\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_2 + i}{2^j}\right), \quad (6.4)$$

et le terme, $(V_{j+1} - V_j) \otimes (V_{j+1} - V_j)$ implique

$$\begin{aligned} d_{k_1, k_2}^{mid, j} &= f_0\left(\frac{2k_1 + 1}{2^{j+1}}, \frac{2k_2 + 1}{2^{j+1}}\right) + \sum_{l, m=-N+1}^{N+1} h_l \cdot h_m \cdot f_0\left(\frac{k_1 + l}{2^j}, \frac{k_2 + m}{2^j}\right) \\ &\quad - \sum_{i=-N+1}^{N+1} h_i \cdot \left[f_0\left(\frac{2k_1 + 1}{2^{j+1}}, \frac{k_2 + i}{2^j}\right) + f_0\left(\frac{k_1 + i}{2^j}, \frac{2k_2 + 1}{2^{j+1}}\right) \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

où les h_i sont des coefficients provenant du polynôme d'interpolation utilisé pour la prédiction.

Remarque 49 On considère que pour les coefficients d_{k_1, k_2}^j les indices k_1 et k_2 vont de 0 à $2^j - 1$. Ceci est naturel si f est bi-périodique car dans ce cas les coefficients d_{k_1, k_2}^j sont 2^j périodiques. Par contre si f est à support compact en v , on doit s'assurer que le domaine est assez large par rapport au support de f de manière à ce que les valeurs de la fonction près de la frontière n'influencent pas les coefficients situés à l'extérieur du domaine. Pour contourner ces problèmes on doit assurer :

$$f(x, v) = 0 \quad \forall v \in \left[0, \frac{N+1}{2^{j_0}}\right] \cup \left[1 - \frac{N-1}{2^{j_0}}, 1\right]$$

dans le cas où l'on travaille dans un domaine $[0, 1] \times [0, 1]$. En général, on doit assurer $f(x, v) = 0$

$$\forall v \in \left[0, v_{min} + \frac{(N+1)(v_{max} - v_{min})}{2^{j_0}}\right] \cup \left[v_{max} - \frac{(N-1)(v_{max} - v_{min})}{2^{j_0}}, v_{max}\right]$$

★ **Compression** : $d_{k_1, k_2}^{row, j}, d_{k_1, k_2}^{col, j}, d_{k_1, k_2}^{mid, j} \longrightarrow$ la grille G

Pour un seuil ε fixé, si un des trois détails "frères" est plus grand que le seuil, on ajoute le point $(j - j_0, k_1, k_2)$ dans la structure G^0 en mettant

des schémas d'advection. Ensuite nous présentons des problèmes de faisceaux plus réalistes toujours en négligeant la charge d'espace : le cas d'un faisceau Gaussien dans un champ de focalisation continu. Pour finir nous présenterons le cas d'un faisceau semi-Gaussien dans un champ de focalisation uniforme avec charge d'espace. Le code adaptatif est pour l'instant uniquement bi-dimensionnel. On se place donc pour les cas tests du faisceau semi-Gaussien dans un contexte axisymétrique avec les variables (r, v_r) et en supposant que $v_\theta = 0$.

6.4.1 Le cylindre fendu tournant

On considère la condition initiale suivante

$$f(0, x, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{x^2 + v^2} < 0.5 \text{ et si } x < 0 \text{ ou } |v| > 0.125, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

représentée figure 6.2. Le domaine de calcul est $[-0.5, 0.5] \times [-0.5, 0.5]$. Le champ

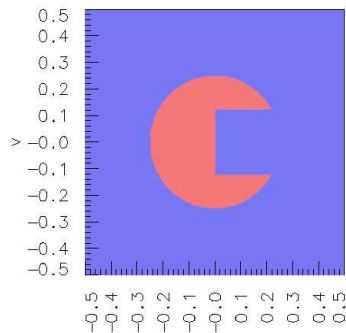


FIG. 6.2 – Cylindre tournant : représentation de la condition initiale.

d'advection est $(v, -x)$, ce qui correspond à l'équation de Vlasov avec un champ électrique appliqué $E_{app}(x, t) = -x$ et sans champ électrique auto-consistant. De plus, la fréquence ω_0 est donnée par $\omega_0 = 1$ et les résultats présentés ont été obtenus avec un pas de temps correspondant à $1/32^{\text{ème}}$ de période soit $\Delta t = 2\pi/(32\omega_0) = \pi/16$.

La figure 6.3 représente l'évolution du cylindre et du maillage adaptatif correspondant, toutes les deux périodes et demi sur dix périodes (ici, une période correspond à un tour) pour un maillage grossier de 8×8 points et 5 niveaux de raffinement. On remarque que le maillage est bien raffiné au voisinage des forts gradients et qu'il suit l'évolution du cylindre sans perdre en qualité. Le seuil pour conserver un détail (i.e. un point de la grille adaptative) est fixé à 10^{-3} .

D'autre part, on représente figure 6.4 l'évolution du nombre de points de la grille adaptée qui reste stable pendant six périodes pour de nouveau n'augmenter que légèrement durant les quatre dernières périodes. En conclusion pour ce cas test, on peut dire que la technique d'ondelettes est bonne pour déterminer les endroits où un raffinement de maillage est nécessaire. L'évolution du maillage adaptatif nous indique que l'étape de prédiction du maillage au pas de temps suivant est faite de manière satisfaisante.

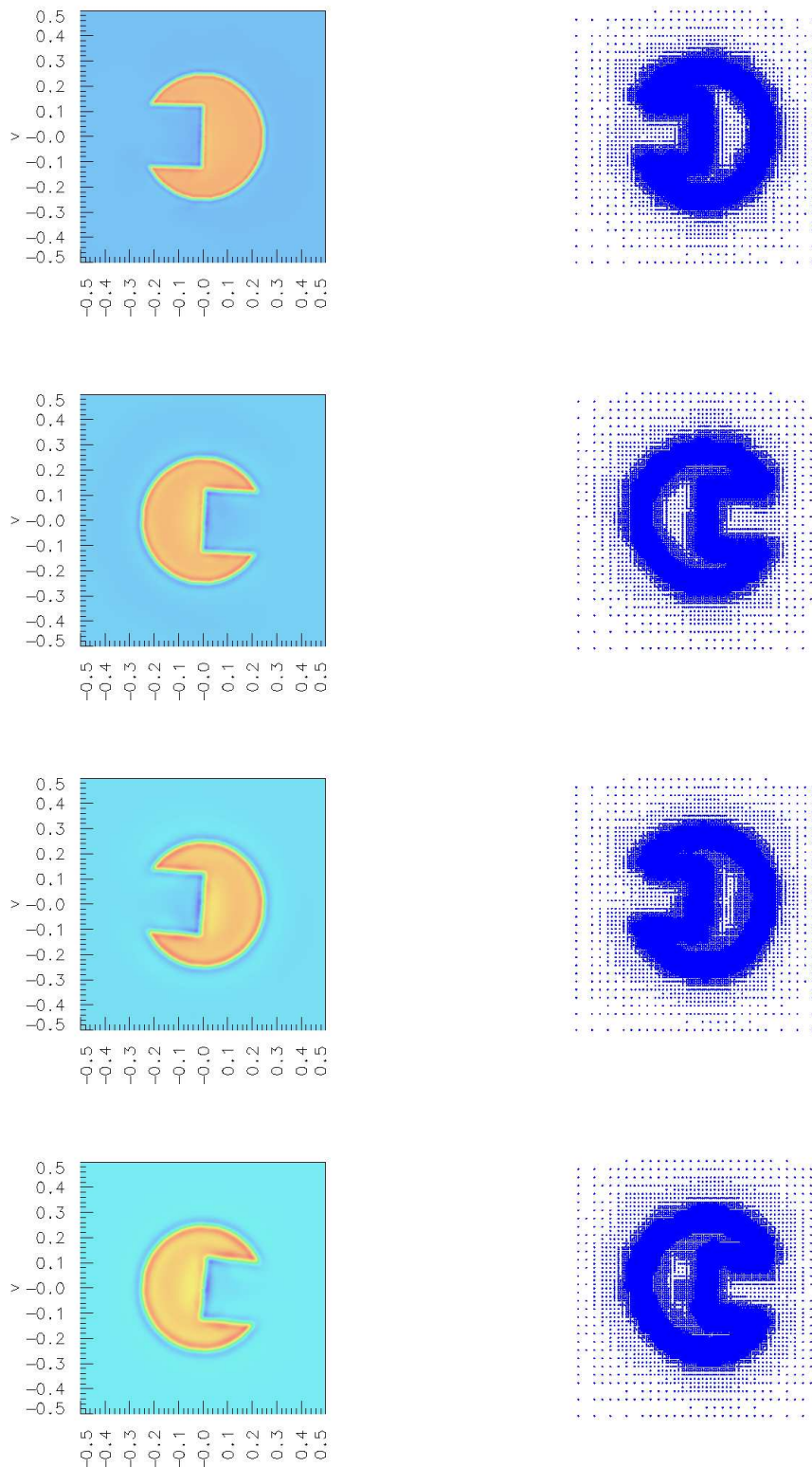


FIG. 6.3 – Cylindre tournant : évolution sur 10 périodes pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif. Représentation du cylindre et de la grille adaptative correspondante toutes les 2,5 périodes.

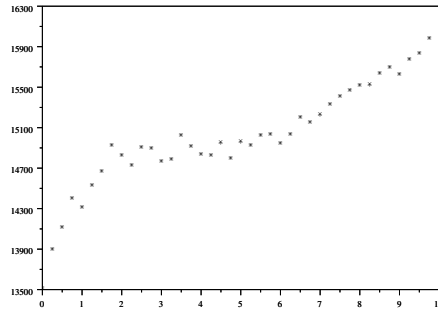


FIG. 6.4 – Cylindre tournant : évolution sur 10 périodes du nombre de points de la grille adaptée pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif.

Pour comparer les résultats adaptatifs à ceux sans adaptivité, on représente figure 6.5 les solutions adaptées et non adaptées obtenues après dix périodes qui semblent tout à fait comparable.

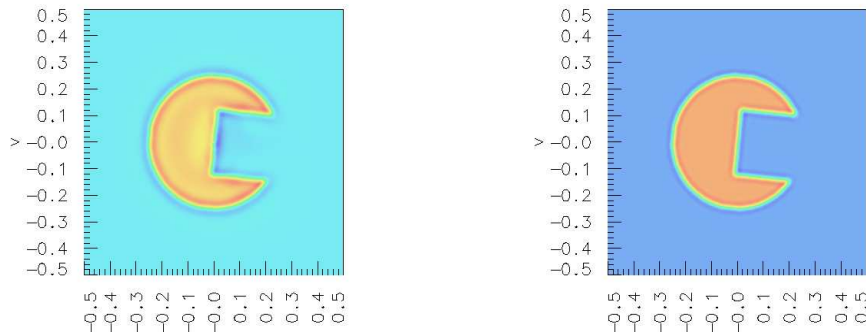


FIG. 6.5 – Cylindre tournant : comparaison après 10 périodes des solutions adaptée (à gauche) et non adaptée (à droite) pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif.

Pour affiner la comparaison, on calcule l'évolution tous les quarts de période des normes relatives L^2 et L^∞ des différences entre la solution adaptée et la solution non adaptée de la façon suivante

$$\| \cdot \|_2 = \frac{1}{N_x N_v} \frac{\left(\sum_{N_x N_v} |f_{ad} - f_{fin}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\max_{N_x N_v} |f_0|}, \quad \| \cdot \|_\infty = \frac{\max_{N_x N_v} |f_{ad} - f_{fin}|}{\max_{N_x N_v} |f_0|}, \quad (6.7)$$

où N_x (resp. N_v) est le nombre de points de la grille fine en x (resp. v), f_{ad} (resp. f_{fin} , f_0) représente la solution adaptée (resp. non adaptée, initiale) en un point de la grille fine (obtenue par interpolation dans le cas de la solution adaptée ce

qui introduit encore une erreur supplémentaire). Ces résultats sont représentés figure 6.6. Naturellement, ces erreurs augmentent au cours du temps mais la norme L^2 qui semble plus pertinente puisqu'elle moyenne l'erreur sur la grille reste tout à fait raisonnable même après dix périodes. Les résultats sont donc comparables à ceux sans adaptativité.

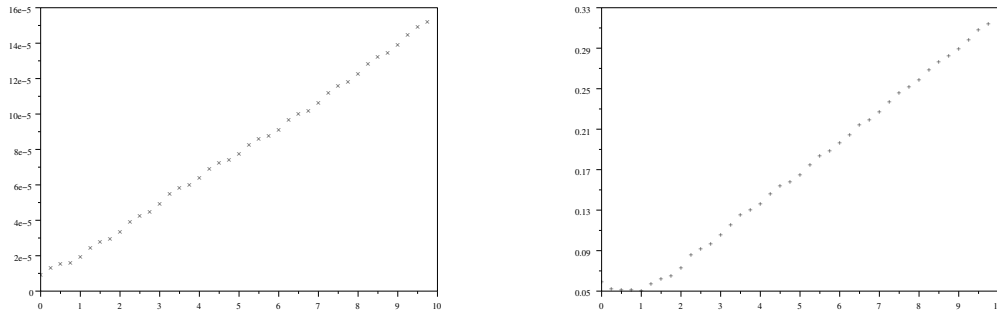


FIG. 6.6 – Cylindre tournant : évolution sur 10 périodes des erreurs relatives L^2 (à gauche) et L^∞ (à droite) pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif.

Enfin, on donne dans le tableau 6.4.4 à la fin de ce chapitre une comparaison des temps de calcul pour les simulations sur dix périodes, en effectuant les diagnostics tous les quarts de périodes d'une part, et sans diagnostic d'autre part. On s'aperçoit que dans le cas du cylindre fendu tournant, l'avantage est nettement en faveur des calculs effectués sans adaptation, en raison du grand nombre de points nécessaires au calcul adaptatif. On pense cependant pouvoir améliorer ces résultats en utilisant une structure plus souple pour les grille G et \tilde{G} et également en améliorant la procédure d'interpolation de la solution adaptée.

6.4.2 Le faisceau Gaussien

On considère un faisceau Gaussien, i.e. de fonction de distribution initiale (cf. figure 6.7)

$$f(r, v) = \frac{I}{2\pi abv_z} e^{-\frac{1}{2}(r^2/a^2 + v^2/b^2)},$$

où I est proportionnel au courant du faisceau, v_z sa vitesse et a, b son rayon RMS et sa vitesse RMS. Nous étudions dans cette section l'évolution d'un tel faisceau sous l'influence uniquement d'un champ appliqué uniforme en z . Nous ne prenons pas en compte le champ auto-consistant. On considère ici $I = 1$, $v_z = 1$, $a^2 = 2$ et $b^2 = 1/2$. Le champ de focalisation uniforme en z est alors donné par $E = -\omega^2 x$ avec $\omega^2 = 4$ et dans ce cas test, $\omega_0 = \omega$. Les tests ont été réalisés avec un pas de temps correspondant à $1/32^{\text{ème}}$ de période soit $\Delta t = 2\pi/(32\omega_0) = \pi/32$ pour une grille grossière de 8×8 points avec 5 niveaux de raffinement soient 256×256 points pour la grille la plus fine et un seuil de raffinement de 10^{-3} .

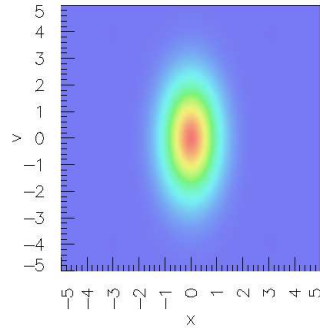


FIG. 6.7 – Faisceau gaussien : représentation de la condition initiale

Avec ces données, on est supposé n'observer aucun mouvement du faisceau dans l'espace des phases. La figure 6.8 représente l'évolution du nombre de points de la grille adaptée qui reste assez stable en moyenne pendant les dix périodes. On représente de nouveau figure 6.9 l'évolution du faisceau et du maillage adaptatif correspondant, toutes les deux périodes et demi sur dix périodes. On remarque que le maillage est bien raffiné au voisinage des gradients les plus importants. Alors que le faisceau semble effectivement ne pas bouger dans l'espace des phases, on peut s'étonner que les grilles n'aient pas des allures plus semblables au cours du temps. On constate également un lissage au cours du temps au centre du faisceau dans l'espace des phase lors de la simulation avec adaptation.

De même que dans le cas du cylindre fendu tournant, on constate que la technique d'ondelettes est bonne pour déterminer les endroits où un raffinement de maillage est nécessaire avec une prédiction satisfaisante.

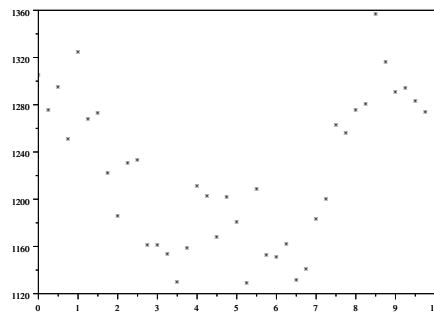


FIG. 6.8 – Faisceau Gaussien dans un champ de focalisation uniforme en z : évolution sur 10 périodes du nombre de points de la grille adaptée pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif.

Pour comparer les résultats adaptatifs à ceux sans adaptivité, on représente de nouveau figure 6.10 les solutions adaptées et non adaptée obtenues après dix périodes ainsi que figure 6.11 l'évolution tous les quarts de période des normes relatives L^2 et L^∞ définies par les relations (6.7).

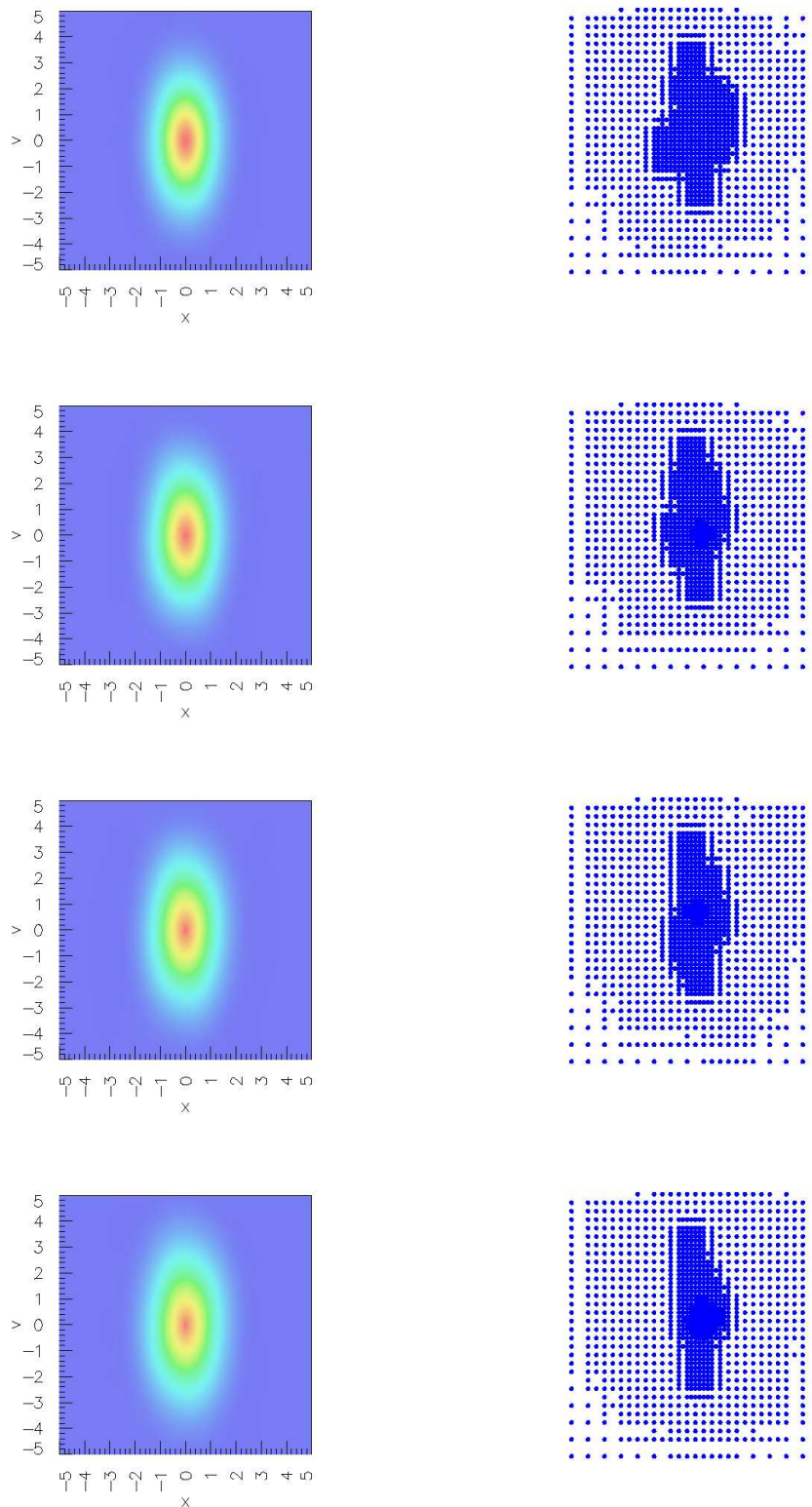


FIG. 6.9 – Faisceau Gaussien : évolution sur 10 périodes pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif. Représentation du faisceau et de la grille adaptative correspondante toutes les 2,5 périodes.

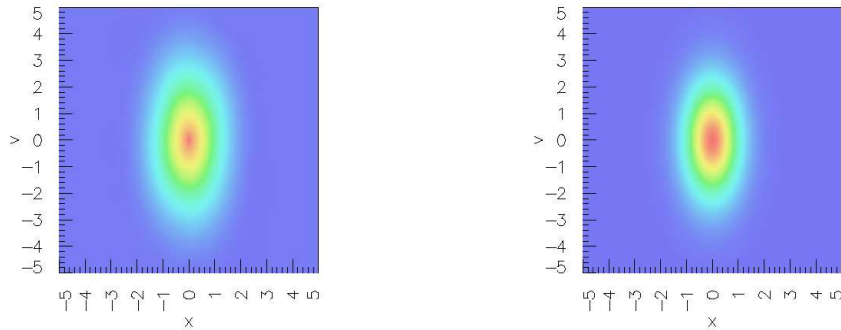


FIG. 6.10 – Faisceau Gaussien dans un champ de focalisation uniforme en z : comparaison après 10 périodes des solutions adaptées (à gauche) et non adaptée (à droite) pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif.

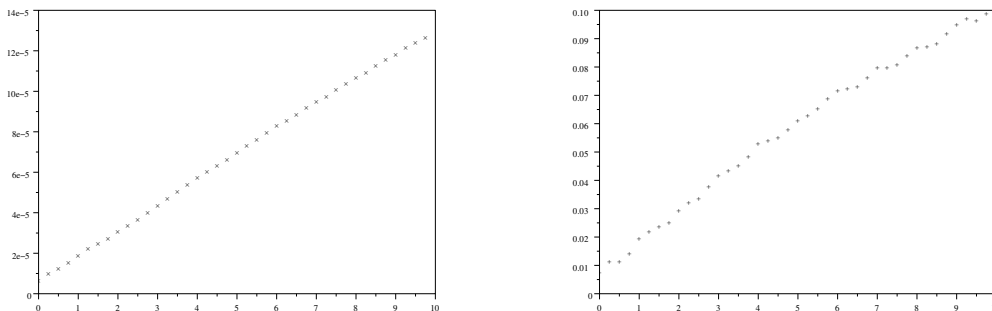


FIG. 6.11 – Faisceau Gaussien dans un champ de focalisation uniforme en z : évolution sur 10 périodes des erreurs relatives L^2 (à gauche) et L^∞ (à droite) pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif.

Les conclusions semblent les mêmes que dans le cas du cylindre tournant à savoir les solutions finales après dix périodes sont comparables avec une norme L^2 de l'erreur qui augmente naturellement au cours du temps mais qui reste tout à fait raisonnable même après dix périodes. De nouveau, nous pensons qu'une amélioration de la partie interpolation est nécessaire.

Notons tout de même que pour ce cas test, nous avons de nouveau comparé les temps de calculs avec et sans adaptation, et avec et sans diagnostics (cf. tableau 6.4.4 en fin de chapitre) et que cette fois, les résultats sont nettement en faveur du cas adaptatif.

6.4.3 Le faisceau semi-Gaussien

On considère ici un faisceau semi-Gaussien défini par la condition initiale

$$f(r, v) = \frac{I}{\pi a^2 \sqrt{2\pi} b} e^{-\frac{1}{2}(v^2/b^2)} \text{ si } r < a,$$

et $f(r, v) = 0$ sinon (cf. figure 6.12). Nous étudions son évolution dans un champ de focalisation appliqué uniforme en z . Nous prenons en compte pour ce cas test du champ auto-consistant du faisceau. On considère un cas de focalisation

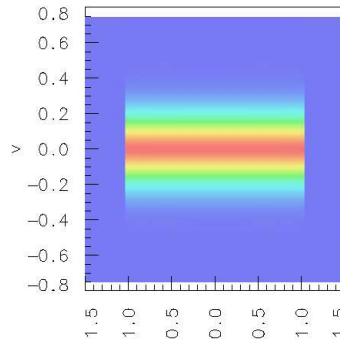


FIG. 6.12 – Faisceau gaussien : représentation de la condition initiale.

uniforme en z avec une dépression du nombre d'onde de 0,25. Ici $\omega = 2$ et $\omega_0 = 1$. $a = 4/\sqrt{15}$, $b = 1/(2 * \sqrt{15})$ et $n_0 = 2\pi$. Les tests ont été réalisés avec un pas de temps correspondant à $1/32^{\text{ème}}$ de période soit $\Delta t = 2\pi/(32\omega_0) = \pi/16$ pour une grille grossière de 8×8 points avec 5 niveaux de raffinement soient 256×256 points pour la grille la plus fine et un seuil de raffinement de 10^{-3} .

La figure 6.13 représente l'évolution du nombre de points de la grille adaptée sur les dix périodes et la figure 6.14 représente l'évolution du faisceau et du maillage au cours du temps.

On constate encore que le maillage s'adapte parfaitement à l'évolution du faisceau. Bien que le calcul ait de nouveau été fait sur dix périodes, nous n'avons représenté dans cette figure que l'évolution sur les six premières périodes. En effet, après cinq périodes le faisceau tend à se stabiliser comme on peut le constater avec l'évolution du nombre de points figure 6.13 mais surtout quand on compare le faisceau et la grille après six et dix périodes comme sur la figure 6.15.

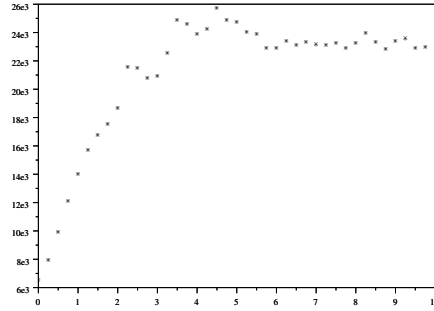


FIG. 6.13 – Faisceau semi-Gaussien dans un champ de focalisation uniforme en z avec charge d'espace : évolution sur 10 périodes du nombre de points de la grille adaptée pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif.

On représente de nouveau figure 6.16 les solutions adaptées et non adaptées obtenues après dix périodes ainsi que figure 6.17 l'évolution tous les quarts de période des normes relatives L^2 et L^∞ telles que définies formule (6.7).

A nouveau, la technique d'ondelettes semble bonne pour déterminer les endroits où un raffinement de maillage est nécessaire avec une bonne prédiction. D'autre part les solutions finales après dix périodes semblent comparables et cette fois, les deux normes semblent plus stables avec toutefois une erreur L^∞ étonnement grande dans la deuxième période, ce qui pourrait être dû au fait que c'est à ce moment que le faisceau présente le plus de filamentation.

En ce qui concerne les temps de calculs avec et sans adaptation, et avec et sans diagnostics (cf. tableau 6.4.4 en fin de chapitre), les résultats sont cette fois nettement en faveur du cas non adaptatif.

6.4.4 Temps de calcul

Dans le tableau ci-dessous, nous donnons les temps des calculs pour les cas tests présentés dans les sous-chapitres précédents.

Cas test	adaptatif		non adaptatif	
	avec diagnostics	sans diagnostics	avec diagnostics	sans diagnostics
Cylindre	33 :00.04	23 :02.63	14 :02.89	11 :29.65
Gaussien	5 :54.20	0 :55.95	13 :38.06	11 :13.72
semi-Gaussien	52 :49.69	40 :28.40	14 :17.58	11 :47.27

TAB. 6.1 – Temps de calcul sur 10 périodes, dans le cas adaptatif et dans le cas non adaptatif, avec et sans diagnostics, pour les différents cas tests effectués

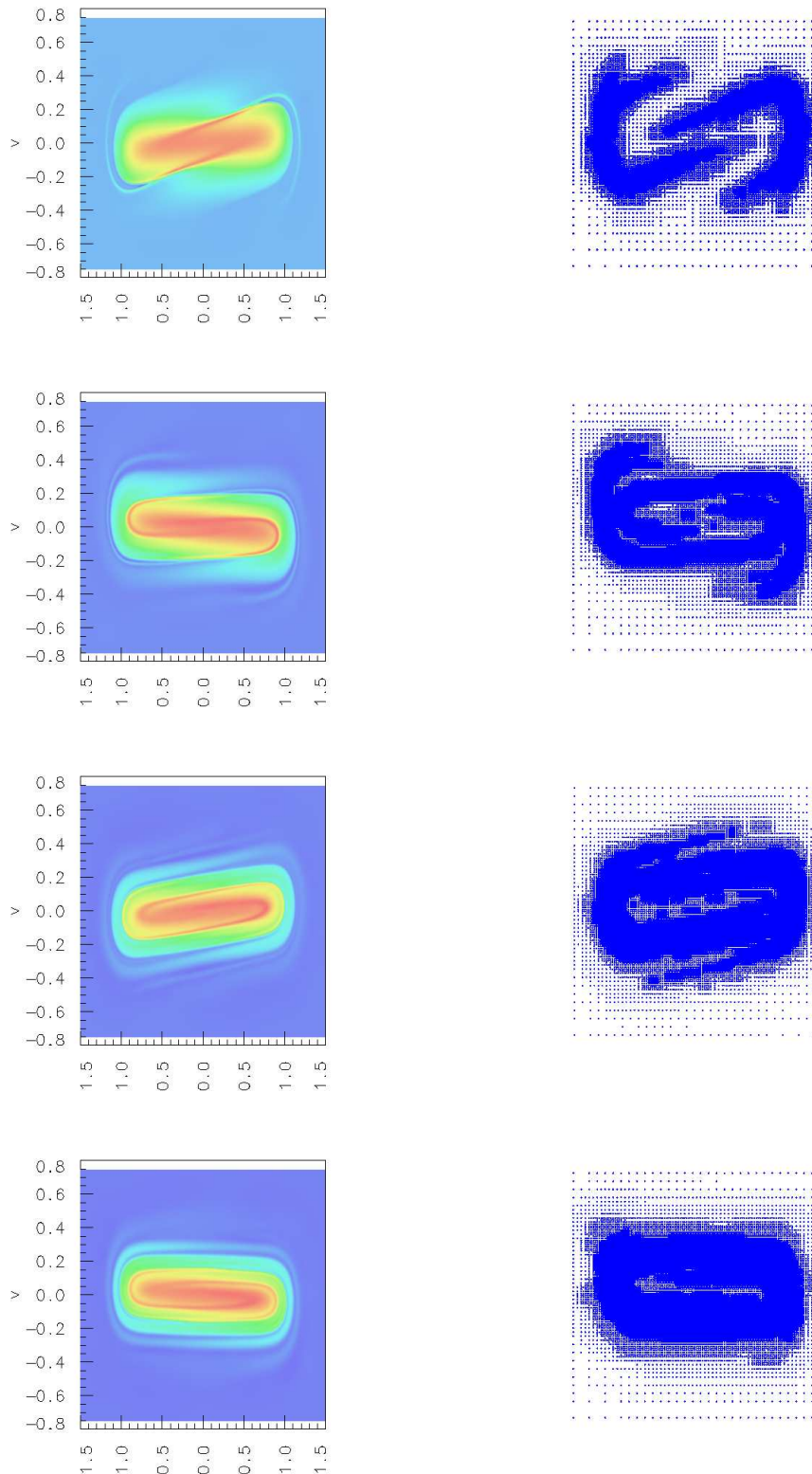


FIG. 6.14 – Faisceau semi-Gaussien : évolution sur 6 périodes pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif. Représentation du faisceau et de la grille adaptative correspondante toutes les 1,5 périodes.

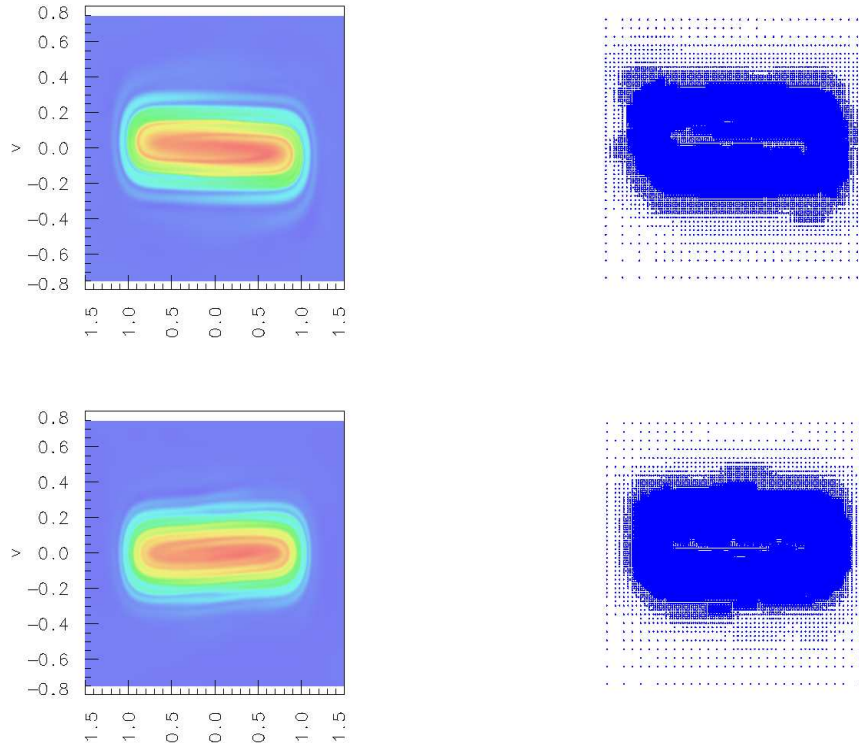


FIG. 6.15 – Faisceau semi-Gaussien dans un champ de focalisation uniforme en z avec charge d'espace : comparaison du faisceau et de la grille adaptative correspondante à 6 et 10 périodes.

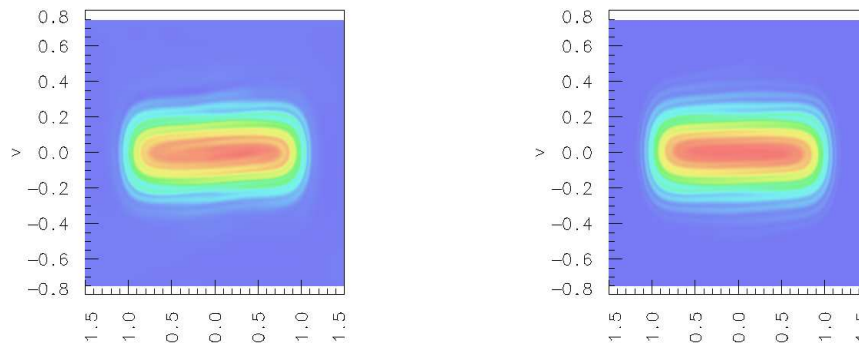


FIG. 6.16 – Faisceau semi-Gaussien dans un champ de focalisation uniforme en z avec charge d'espace : comparaison après 10 périodes des solutions adaptées (à gauche) et non adaptées (à droite) pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif.

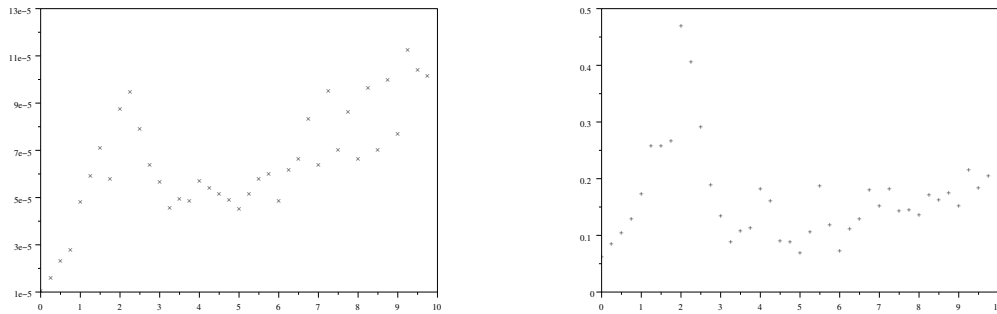


FIG. 6.17 – Faisceau semi-Gaussien dans un champ de focalisation uniforme en z avec charge d'espace : évolution sur 10 périodes des erreurs relatives L^2 (à gauche) et L^∞ (à droite) pour une grille grossière de $2^3 \times 2^3$ points et 5 niveaux de raffinement adaptatif.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons développé une méthode utilisant une grille de l'espace des phases qui évolue au cours du temps. Le principe de base est la mise au point d'un algorithme adaptatif de manière à concentrer l'effort de calcul aux endroits où les variations de la fonction de distribution sont les plus importantes. Pour cela, nous utilisons une décomposition de la fonction de distribution dans une base d'ondelettes. On a utilisé des ondelettes interpolantes (interpolettes) construites sur des polynômes de Lagrange. Cependant on pourrait considérer d'autres types d'ondelettes non interpolantes mais qui ont de meilleures propriétés analysantes (oscillations, moments nuls, localisation des singularités, support plus restreint) d'une part et de meilleures propriétés reconstituantes (régularité, simplicité, approximation d'ordre élevé, stabilité) d'autre part. Par exemple on pourrait s'intéresser au cas des coiffettes et aux bases d'ondelettes bi-orthogonales qui sont très souples parce que la fonction de reconstitution porte sur l'ondelette ψ et la fonction d'analyse sur l'ondelette duale $\tilde{\psi}$ où la "dualité" est définie par la relation $\langle \psi(\cdot - k), \tilde{\psi}(\cdot - l) \rangle = \delta_{k,l}$. Les résultats numériques obtenus par cette méthode sont satisfaisants d'un point de vue qualitatif. Il reste encore à faire un travail de validation de la méthode du point de vue quantitatif. La méthode est pour l'instant uniquement implémentée en 2 deux dimensions de l'espace des phases r et v_r avec $v_\theta = 0$. L'extension à des v_θ quelconques ne devrait pas poser de problèmes. L'étape importante qui reste à accomplir est le passage au 4D. Comme nous l'avons vu, l'algorithme que nous utilisons s'étend sans problème à une dimension quelconque. Par contre pour que la méthode s'avère efficace, il devient indispensable en 4D de la paralléliser. Or en raison de l'évolution du maillage au cours du temps, il est difficile d'atteindre un bon équilibrage des charges sur les processeurs.

Bibliographie

- [1] R. Abgrall, *Design of an essentially non-oscillatory reconstruction procedure on finite-element type meshes*, Rapports de Recherche INRIA, No 1584, (1992).
- [2] R. Abgrall, F.C. Lafon *ENO schemes on unstructured meshes*, Rapports de Recherche INRIA, No 2099, (1993).
- [3] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, A series of monographs and textbooks, Academic Press, 1975.
- [4] T.P. Armstrong, *Numerical studies of the nonlinear Vlasov equation*, Phys. Fluids **10**, 1269, (1967).
- [5] T.P. Armstrong, D. Montgomery *Asymptotic state of the two-stream instability*, Plasma of Phys., 1(4), 425, (1967).
- [6] T.D. Arber, R.G.L. Vann, *A critical comparison of Eulerian-Grid-Based Vlasov solvers*, J. Comput. Phys. **180**, 2002, pp 339-357.
- [7] A.A. Arsenev, *Global existence of a weak solutions of Vlasov's system of equations*, U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. **15**, (1975), 131-143.
- [8] A.A. Arsenev, *Some estimates for the solution of the Vlasov equation*, (Russian) zh. Vychiol. Math. i Math. Fiz. (1985) n°1, 80-87.
- [9] A.A. Arsenev, *Local uniqueness and existence of classical solution of Vlasov's system of equations*, Soviet Math. Dokl. **15** (1974), 1223-1225.
- [10] K. Asano, *On local solutions of the initial value probleme for the the Vlasov-Maxwell equation*, Comm. Math. Phys. **106** (1986), 551-568
- [11] L., Bacchelli Montefusco, G. Casciola, *Interpolazione di funzioni bidimensionali di classe C^1* , Monografie di Software Matematico IAC-CNR, Rome, 1984.
- [12] L., Bacchelli Montefusco, G. Casciola, *Algorithm 677 C^1 surface interpolation*, ACM, Transaction on Mathematical Software, Vol 15, No 4, 1989.
- [13] D.S. Balsara, C.W. Shu, *Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy*, J. of Comput. Phys., 160, pp 405-452, (2000).
- [14] C. Bardos, P. Degond, *Global existence for the Vlasov-Poisson equation in 3 spaces variables with small initial data*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. non linéaire 2, (1985), 101-118.
- [15] J. Batt, *Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics*, J.Differ. Equations, (1977), 342-364.

- [16] J.Batt, G. Rein, *Global classical solutions of the periodic Vlasov-Poisson system in three dimension*, C.R. Acad. Sci. Paris. **313**, Ser. I, (1991), 411-416.
- [17] R.E. Barnhill, *Representation and approximation of surfaces*, in J.R. Rice, ed., *Mathematical Software III*, Academic Press, New York, 1977.
- [18] R.E. Barnhill, G. Birkhoff, W.J. Gordon, *Smooth interpolation in triangles*, J. Approx. Theory **8** (2), pp 114-128, 1973.
- [19] R.E. Barnhill, J.A. Gregory, *Compatible smooth interpolation in triangles*, J. Approx. Theory **15**, 214-225, 1975.
- [20] R.E. Barnhill, F.F. Little, *Three and four dimensional surfaces*, Rocky Mountain J. Math. **14**, pp 77-102, 1984.
- [21] R.K. Beatson, G.N. Newsam, *Fast evaluation of radial basis functions : I*, Math. Appli., Vol. 24, (1992), 1-19.
- [22] R.K. Beatson, M.J.D. Powell, *An iterative method for thin plate spline interpolation that employs approximations to Lagrange functions*, In Numerical Analysis, eds. D.F. Griffiths & G.A. Watson, Longman Sci. & Tech., (1993), 17-39.
- [23] M.L. Begue, A. Ghizzo, P. Bertrand, *Two-dimensional Vlasov simulation of Raman scattering and plasma beatwave acceleration on parallel computers*, J. Comput. Phys., **151**, pp. 458-478, (1999).
- [24] M.L. Begue, A. Ghizzo, P. Bertrand, E. Sonnendrücker, O. Coulaud, *Two-dimensional semi-Lagrangian Vlasov simulations of laser-plasma interaction in the relativistic regime*, J. Comput. Phys., **62**, pp. 367-388, (1999).
- [25] M. Bernadou, K. Hassan, *Basis functions for general HCTC triangles, complete or reduced* Rapports de recherche INRIA, no. 5 (1980).
- [26] M. Bernadou, *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces*, Recherche en Mathématiques Appliquées, P.G. Ciarlet, J.-L. Lions éditions, Masson (1994).
- [27] M. Bernadou, J.M. Boisserie, *The finite Method in Thin Shell Theory : Application to Arch Dam Simulations*, Birkhäuser, 1982.
- [28] R. Bermejo, A. Staniforth, *The conversion of semi-lagrangian advection schemes to quasi-monotone schemes*, Mon. Wea. Rev. **120**, pp 2622-2632
- [29] R. Bermejo, *On the equivalence of semi-Lagrangian schemes and Particle-In-Cell finite element method*, Notes adn Correspondance, Amer. Meteo. Soc., pp. 979-987, (1990) . **120**, pp 2622-2632
- [30] R. Bermejo, *Analysis of an algorithm for the Galerkin-characteristic method*, Numer. Math. **60**, 163-194 (1991).
- [31] M. Berzins, *A data-bounded quadratic interpolant on triangles and tetrahedra*, SIAM, J. Comput., Vol 22, No 1, 2000, 177-197
- [32] N. Besse, *Convergence of a semi-Lagrangian scheme for the one dimensional Vlasov-Poisson system*, à paraître dans SIAM J. of Numer. Anal..

- [33] N. Besse, *Convergence of classes of high order semi-Lagrangian schemes for the Vlasov-Poisson system*, en préparation.
- [34] N. Besse, *Convergence of a semi-Lagrangian scheme with propagation of gradients for the Vlasov-Poisson system*, en préparation.
- [35] N. Besse, E. Sonnendrucker *Semi-Lagrangian schemes for the Vlasov equation on an unstructured mesh of phase space*, à paraître dans J. of Comput. Phys.
- [36] N. Besse, F. Filbet, M. Gutnic, I. Paun, E. Sonnendrücker, *An adaptive numerical method for the Vlasov equation based on a multiresolution analysis*, in Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2001, Eds F. Brezzi, A. Buffa, S. Escorsaro, A. Murli, Springer, (2001), pp 437-446.
- [37] M. Bézard, *Régularité L^p précisée des moyennes dans les équations de transport*, Bull. Soc. Math. France, **122**, (1994), 29-76.
- [38] C.K. Birdshall, A.B. Langdon, *Plasmas physics via computer simulation*, McGraw-Hill, 1985.
- [39] G. Birkhoff, L. Mansfield, *Compatible triangular finite elements*, J. of Math. Anal. Appl., **47**, (1974) 531-533
- [40] J.P. Boris, D.L. Book, *Solution of continuity equations by the method of flux-corrected transport*, J. Comput. Phys., **20**, (1976), 397-431.
- [41] F. Bouchut, F. Golse, M. Pulvirenti, *Kinetic equations and asymptotic theory*, Gauthier-Villars, series in Applied Mathematics, (2000).
- [42] J.P. Boyd, *Asymptotic coefficients of Hermite function series*, J. Comput. Phys. **54**, 382, (1984).
- [43] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson 1992.
- [44] M.D. Buhmann, *Multivariate cardinal interpolation using radial basis functions*, Constr. approx. **6** (1990), 225-256.
- [45] M.D. Buhmann, *Multivariate interpolation with radial basis functions*, University of Cambridge, DAMPT 1988/NA8 (1988).
- [46] F.F. Chen, *Introduction to plasma physics*, Plenum Press, 1974, New York.
- [47] C. Hu, C.W. Shu, *Weight essentially non-oscillatory schemes on triangular meshes*, J. of Comput. Phys., **150**, 97-127, (1999)
- [48] C.Z. Cheng, G. Knorr, *The integration of the Vlasov equation in configuration space*, J. Comput. Phys., **22**, (1976), 330-351.
- [49] P.G. Ciarlet, *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Nasson, 1994.
- [50] P.N. Childs, K.W. Morton, *Characteristic Galerkin methods for scalar conservation laws in one dimension*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 27, No. 3, pp. 553-594, 1990.

- [51] A. Cohen, S.M. Kaber, S. Müller, M. Postel, *Fully adaptative multiresolution finite volume schemes for conservation laws*, Math. Comput. 72, No 241, pp 183-225, (2003).
- [52] A. Cohen, *Numerical analysis of wavelet methods*, studies in mathematics and its applications, 32, North-Holland, Elsevier, 2003.
- [53] A. Cohen, *Ondelettes et traitement numérique du signal*, Recherche en Mathématiques Appliquées, RMA 25, Eds P.G. Ciarlet et J.L. Lions, Masson, 1992.
- [54] J. Cooper, A. Klimas, *Boundary value problems for the Vlasov-Maxwell equation in one dimension*, J. Math. Anal. Appl., (1980), 306-329.
- [55] P. Colella and P.R. Woodward, *The piecewise parabolic method (PPM) for gas-dynamical simulations*, J. Comput. Phys. **54**, 174 (1984)
- [56] M. Crouzeix, A.L. Mignot, *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, 1992.
- [57] G.-H. Cottet, P.-A. Raviart, *Particle methods for the one-dimensional Vlasov-Poisson equations*, SIAM J. Numer. Anal., Vol 21, No 1, (1984), 52-76.
- [58] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*, SIAM, 1992.
- [59] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*, . Comm. on Pure and Appl. Math., Vol XLI, 909-996, (1988).
- [60] I. Daubechies, *Orthonormal bases of compactly supported wavelets II. variations on a theme*, SIAM, J. Math. Anal., Vol 24, No 2, 499-519, (1993).
- [61] P. Degond, *Régularité de la solution des équations cinétiques en physique des plasmas*, Séminaire équations aux dérivées partielles de l'école polytechnique, 1985-1986.
- [62] P. Degond, *Local existence of the solutions of the Vlasov-Maxwell equations and convergence to the Vlasov-Poisson equations for infinite light velocity*, Math. Meth. Appl. Sci. 8 (1986), 533-558.
- [63] P. Degond, P.A. Raviart, *On the paraxial approximation of the stationary Vlasov-Maxwell system*, Math. Mod. and Meth. Appl. Sci., Vol3, **4**, (1993) 513-562.
- [64] P. Degond, B. Lucquin-Desreux, *The Fokker-Planck asymptotics of the Boltzmann collision operator in the Coulomb case*, Math. Mod. and Meth. Appl. Sci., **2**, (1992) 167-182.
- [65] J.L Delcroix, A. Bers, *Physique des plasmas*, Tome 1 & 2 Savoirs Actuels, CNRS édition, (1994).
- [66] J. Denavit, B.W. Doyle, R.H. Hirsch, Phys. Fluids **11**, 2241 (1968).
- [67] J. Denavit, W.L. Kruer, Phys. Fluids **14**, 1782 (1971).
- [68] L. Desvillettes, *On asymptotics of the Boltzmann equation when collisions become grazing*, Transport Theory Statist. Phys. **21** (1992), pp. 259-276.
- [69] R.J. Diperna, P.L. Lions, *Solutions globales d'équations du type Vlasov-Poisson*, C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I, **307**, (1988), 655-658.

- [70] R.J. Diperna, P.L. Lions, *Global weak solution of Vlasov-Marxwell system*, Comm. Pure Appl. Math., **42** (1989), 729-757.
- [71] R.J. Diperna, P.L. Lions, *Global weak solution of kinetic equations*, Rend. Sem. Math. Univ. Politec. Torino, **46**, (1988), 259-288.
- [72] R.J. Diperna, P.L. Lions, Y. Meyer, *L^p regularity of velocity averages*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire, 8, (1991) 271-287.
- [73] J. Douglas Jr., T.F. Russell, *Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the methods of characteristics with finite element or finite difference procedures*, SIAM, J. Numer. Ana., **19**, (1982), 871-885.
- [74] J. Duchon, *Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces*, RAIRO, analyse numérique 10, No. 12, (1976) 5-12.
- [75] J. Duchon, *Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces*, in Constructive theory of functions of several variables, Lecture Notes in Mathematics 57, eds W. Schempp & K. Keller, Springer-Verlag, (1977), 85-100.
- [76] J. Duchon, *Sur l'erreur d'interpolation des fonctions de plusieurs variables par les D^m -splines*, RAIRO, analyse numérique, Vol. 12 (1978) 325-334.
- [77] N. Dyn, *Interpolation and approximation by radial and related functions*, in Approximations theory VI (C.K. Chui, L.L. Schumacher, and J.D. Ward, eds), Vol. 1, Acad. Press, 1989.
- [78] N. Dyn, D. Levin, S. Rippa, *Numerical procedures for surfaces fitting of scattered data by radial functions*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 7, (1986) 639-659.
- [79] N. Dyn, D. Levin, *Interpolating subdivision schemes for generation of curves and surfaces*, Internat. Ser. Numer. Math., 94, 91-106, (1990).
- [80] T. Eirola, *Sobolev characterization of solution of dilation equations*, SIAM, J., Math., Anal., Vol 23, No 4, 1015-1030, (1992).
- [81] M. Falcone, R. Ferretti, *Convergence analysis for a class of High-Order semi-Lagrangian advection schemes*, SIAM, J. Numer. Anal. Vol 35, No3, pp 909-940, (1998).
- [82] G. Farin, *A modified Clough-Tocher interpolant*, CAGD 2, North-Holland, (1985), 19-27.
- [83] H. Figua, F. Bouchut, M.R. Feix, E. Fijalkow, *Instability of the filtering method for Vlasov's Equation*, J. Comput. Phys., **159**, (2000), 440-447.
- [84] E. Fijalkow, *A numerical solution to the Vlasov equation*, Comput. Phys. Commun., **116**, (1999), 319-328.
- [85] F. Filbet, *Convergence of a finite volume scheme for the Vlasov-Poisson system*, SIAM, J. of Numer. Anal., **39**, (2001), no. 4, 1146-1169.
- [86] F. Filbet, *Contribution à l'analyse et à la simulation numérique de l'équation de Vlasov*, Thèse de l'université de Nancy, (2001).

- [87] F. Filbet, E. Sonnendrücker, P. Bertrand, *Conservative Numerical schemes for the Vlasov equation*, J. Comput. Phys., 172-1, (2000), 166-187.
- [88] F. Filbet, E. Sonnendrücker *Comparaison of Eulerian Vlasov solvers*, Comput. Phys. Comm., **150**, (2003), 247-266.
- [89] F. Filbet, M. Gutnic, I. Paun, E. Sonnendrücker, *Etude de méthodes numériques pour la simulation de faisceaux de particules dans un champ de focalisation périodique*, Rapport CEA (2003)
- [90] E. Forest, J. Bengtsson, *Application of the Yoshida-Ruth techniques to implicit integration and multi-map explicit integration*, Phys. Let. A 158 (1991) 99-101.
- [91] R. Franke, *Scattered data interpolation tests of some methods*, Math. Comput., Vol.38, (1982), 181-200.
- [92] R. Franke, *Locally determined smooth interpolation at irregularly spaced points in several variables*, J. inst. Maths. Applics, 19, (1977), 471-482.
- [93] R. Franke, G. Nielson, *Smooth interpolation of large sets of scattered data*, Int. J. Numer. Meth. in Engin., Vol. 15, (1980) 1691-1704.
- [94] R.R.J. Gagné, M.M. Shoucri, *A splitting scheme for the numerical solution of a one-dimensional Vlasov equation*, J. Comput. Phys. 24, 445 (1977)
- [95] R. T. Glassey, *The cauchy problem in kinetic theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1996.
- [96] R.T. Glassey, J. Schaeffer, *On symmetric solutions of the relativistic Vlasov-Poisson system*, Comm. Math. Phys., 101,(1985), 459-473.
- [97] R.T. Glassey, J. Schaeffer, *The "two and one-half-dimensional relativistic Vlasov-Maxwell system*, Comm. Math. Phys., 185, (1997), 257-284.
- [98] R.T. Glassey, J. Schaeffer, *The "one and one-half-dimensional relativistic Vlasov-Maxwell system*, Math. Meth., Appl. Sci. 13, (1990), 169-179.
- [99] R.T. Glassey, J. Schaeffer, *Convergence of a particle method for the relativistic Vlasov-Maxwell system*, SIAM J. Numer. Anal. 28, (1991), 1-25.
- [100] R.T. Glassey, W.A. Strauss, *Singularity formation in a collisionless plasma could only at high velocities*, Arch, for, Rational Mech. and Anal., 92, (1986), 59-90.
- [101] R.T. Glassey, W.A. Strauss, *Large velocities in the relativistic Vlasov-Maxwell equations*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math, 36, (1989), 615-627.
- [102] D. Goldman, T. J. Kaper, *Nth-order operator splitting schemes and non-reversible systems* SIAM J. Numer. Anal., 33 (1996), pp. 349-367.
- [103] W.J. Gordon, *Distributive lattices and the approximation of multivariate functions*, in I.J. Schoenberg; ed., Approximations with Special Emphasis on Splines, University of Wisconsin Press, Madison, 1969.
- [104] W.J. Gordon, J.A. Wixom, *Shepard's method of "metric interpolation" to bivariate and multivariate interpolation*, Math. Comp., Vol. 32, No 141,(1978) 253-264.

- [105] F.C. Grant, M.R. Feix, *Fourier-Hermite solutions of the Vlasov equation in the linearized limit*, Phys. Fluids, **10**, 696 (1967a)
- [106] F.C. Grant, M.R. Feix, Phys. Fluids, **10**, 1356 (1967b)
- [107] Y. Guo, *Global weak solution of the vlasov-Maxwell system with boundary conditions*, Comm. Math. Phys., 157, (1993), 245-263.
- [108] P. Guillaume, *Optimisation non linéaire*, Cours Génie Mathématique et Modélisation, quatrième Année, INSA, 1998.
- [109] B. Gustafsson, H.-O. Kreiss, J. Olinger, *Time dependent problems and difference methods*, Pure and applied mathematics, Wiley, 1995.
- [110] Handbook of numerical analysis, *Finite element methods*, Volume II, P.G. Ciarlet and J.L. Lions editors, North-Holland, 1991.
- [111] Y. Hasbani, E. Livne, M. Bercovier, *Finite elements and characteristics applied to advection-diffusion equations*, Comput. & Fluids, **11** (1983) 71-83.
- [112] G. Herron, *Smooth closed surfaces with discrete triangular interpolants*, CAGD 2, North Holland, (1985) 297-306.
- [113] J.B Hiriart-Urruty, C. Lemarechal *Convexe analysis and minimisation algorithms*, Springer-Verlag, 1993.
- [114] R.W. Hockney, J.W. Eastwood, *Computer simulation using particles*, McGraw-Hill, 1981.
- [115] J.P. Holloway, *Spectral velocity discretizations for the Vlasov-Maxwell equations*, Trans. Theory and Statistical Phys. 25, 1 (1996).
- [116] E. Horst, *On the classical solutions of the initial value problem for the unmodified nonlinear Vlasov equations I : general theory, II : special cases*, Math. Meth. Appl. Sci., 3, (1981) 229-248 ; 4, (1982), 19-32.
- [117] E. Horst, *On the asymptotic growth of the solutions of the Vlasov-Poisson system*, Math. Meth. Appl. Sci., Vol 16, (1993), 73-85.
- [118] S.V. Iordanskii, *The Cauchy problem for kinetic equation of plasma*, Transl. II. Ser. An. Math. Soc., 35, (1964), 351-363.
- [119] R. Illner, H. Neunzert, *An existence theorem for the unmodified Vlasov's equation*, Math. Math. Appl. Sci 1, 530-544 (1979).
- [120] E. Isaacson, H.B. Keller, *Analysis of numerical methods*, John Wiley & Sons, Inc., New York, (1966).
- [121] B. Izrar, A. Ghizzo, P. Bertrand, E. Fijalkow, M.R. Feix, Comput. Phys. Commun., **52**, 375 (1989).
- [122] M.J. Johnson, *A bound on the approximation order of surfaces splines*, Constr. Approx. 14, (1998), 429-438.
- [123] M.J. Johnson, *Approximation in $L_p(\mathbb{R}^d)$ from spaces spanned by the perturbed integer translates of a radial function*, J Approx. Theory 107, (2000), 163-203.

- [124] G. Joyce, G. Knorr, H.K. Meier, *Numerical integration methods of the Vlasov equation*, J. Comput. Phys. **8**, 53 (1971b).
- [125] F. Kikuchi, *On a finite element scheme based on discrete Kirchoff Assumption*, Numer. Math. **24**, pp 211-231, Springer-Verlag 1975.
- [126] A.J. Klimas, *Numerical method based on the Fourier-Fourier transform approach for modelling 1-D electron Plasma evolution*, J. Comput. Phys., **50**, (1983), 270.
- [127] A. Klimas, *A method for overcoming the velocity space filamentation problem in collisionless plasma model solutions*, J. Comput. Phys., **68**, (1987), 202-226.
- [128] A. Klimas, W.M. Farrell, *A splitting algorithm for the Vlasov simulation with filamentation filtration*, J. Comput. Phys., **110**, (1994), 150-163.
- [129] G. Knorr, Z. Naturforsch, A **18**, 1304 (1963).
- [130] G. Knorr, J. Comput. Phys. **13**, 165 (1973).
- [131] N.A. Krall, A.W. Trivelpiece, *Principles of plasma physics*, International series in pure and applied physics, McGraw-Hill, 1973.
- [132] J. Kuntzmann, *Méthodes numériques, interpolation-dérivées*, Dunod, Paris, 1959.
- [133] R. Kurth, *Das Anfangswertproblem der stellardynamick*,², Astrophys., **30**, (1952), 213-229.
- [134] B. Lapeyre, E. Pardoux, R. Sentis, *Méthodes stochastiques pour les équations de transport et de diffusion*, Mathématiques & Applications, SMAI, (1998).
- [135] P. Lascaux, R. Théodor, *Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur*, I et II, Masson, (1993).
- [136] C.L. Lawson, *C¹-compatible interpolation over triangles*, NASA-CR-147946, Technical Memorandum 33-770, Jet Propulsion Laboratory, Institute of Technologie of Pasadena, California, 1976.
- [137] A. Le Mehauté, *Interpolation et approximation par des fonctions polynomiales par morceaux dans \mathbb{R}^n* , Thèse de l'université de Rennes I, (1984).
- [138] R. J. Leveque, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics : ETH Zürich, Birkhäuser, 1992.
- [139] E. Lifchitz, L. Pitayevski, *Cinétique physique*, Tome 10, ed. MIR 1990.
- [140] P.-L. Lions, B. Perthame, *Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional Vlasov-system*, Invent. Math., **105**, (1991), pp 415-430.
- [141] G.G. Lorentz, *Approximation of functions*, Holt, Rinehart and Winston, 1966. 1990.
- [142] D.G. Luenberger, *Linear and nonlinear programming*, Addison-Wesley, 1984
- [143] W. Madych, S.A. Nelson, *Polyharmonic cardinal splines*, J. Approx. Theo. **60**, No. 2, (1990), 141-156.

- [144] G. Manfredi, *Long time behaviour of non linear landau damping*, Phys. Rev. Letters., 79, (1997), 2815-2818.
- [145] A. Mangeney, F. Califano, C. Cavazzoni, P. Travnicek, *A numerical scheme for the integration of the Vlasov-Maxwell system of equations*, J. Comput. Phys., 179, (2002), 495-538.
- [146] L. Mansfield, *Higher order compatible triangular finite element*, Mumer. Math. 22, (1974) 89-97.
- [147] P. Mineau, *Simulation en physique des plasmas*, PHD thesis, Orléans, France (1997).
- [148] M. Minoux, *programmation mathématique, théorie et algorithmes*, Dunod, 1983.
- [149] J. Meinguet, *Multivariate Interpolation at arbitrary points made simple*, J. Appl. Math. Phys. 30, (1979), 292-304.
- [150] Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, I, ondelettes, Herman, 1990. J. Appl. Math. Phys. 30, (1979), 292-304.
- [151] T. Nakamura, T. Yabe, *Cubic interpolated propagation scheme for solving the hyper-dimensional Vlasov-Poisson equation in phase space*, Comput. Phys. Comm., 120, (1999), 122-154.
- [152] T. Nakamura, R. Tanaka, T. Yabe, K. Takizawa *Exactly conservative semi-Lagrangian scheme for multi-dimensional hyperbolic equations with directional splitting technique*, J. Comput. Phys., **174**, (2001), 171-207.
- [153] I.M. Navon, *implementation of a posteriori methods for enforcing conservation of potential enstrophy and mass in discretized shallow-water equations models*, Mont. Weath. Rev., Vol 109, (1981) 946-958.
- [154] I.M. Navon, *The bayliss-Isaacson algorithm and the constraint restoration method are equivalent*, Meteorol. Atmos. Phys., Vol 37, (1987) 143-152.
- [155] G. Nielson, *Minimum norm interpolation in triangles*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., **17**, (1980), 44-62.
- [156] G. M. Nielson, *The side-vertex method for interpolation in triangles*, J. Approx. Theory 25, pp 318-336, 1979
- [157] G.M. Nielson, R. Franke, *Surface construction based upon triangulation*, in Surfaces in CAGD, R.E. Barnhill, W. Boehm (eds.), North-Holland, 1983.
- [158] H. Neunzert, J. Wick, *Die theorie de asymptotischen verteilung und die numerische losung von integrodifferentialgleichungen*, Numer. Math. **21**, pp. 243-243, (1973).
- [159] G. Nürnberger, *Approximation by spline Functions*, Springer-Verlag, (1980).
- [160] P. Percell, *On cubic and quartic Clough-Tocher finite element*, SIAM J. Numer. Anal., Vol. 13, No 1, (1976) 100-103.
- [161] K. Pfaffelmoser, *Global classical solutions of the Vlasov-Poisson system in three dimensions for general initial data*, J. Diff. Equations, 95, (1992), 281-303.

- [162] K. Pfaffelmoser, *Globale Lösungen des dreidimensionalen Vlasov-Poisson Systems*, Dissertation, München, 1989
- [163] T.N. Phillips, A.J. Williams *Conservative semi-Lagrangian finite volume schemes*, Numer. Methods Partial Differential Eq., 17, (2001), 403-425.
- [164] T.N. Phillips, A.J. Williams, *A semi-Lagrangian finite volume method for Newtonian convection flows*, SIAM, J. Sci. Comput. Vol 22, No 6, pp. 2152-2177.
- [165] Z. Ping, Q. Qingjiu, *On the existence of almost global weak solution to multidimensional Vlasov-Poisson equation*, Cheenese Ana. Math. Serie B n°3 (1998), 381-390.
- [166] O. Pironneau, *On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations*, Numer. Math. **38**, pp. 309-332, (1982)
- [167] M. J. D. Powell, *Radial basis functions for multivariate approximations*, in Algorithms for approximation (J.C. Mason and M.G. Cox, eds) oxford University Press, 1987.
- [168] M. J. D. Powell, *Theory of radial basis function approximation in 1990*, in Advances in numerical Analysis, Vol. II : Wavelets subdivisions Algorithms, and radial basis functions, ed W.A. Light, Clarendon Press (Oxford), (1992), 105-210.
- [169] M. J. D. Powell, *Some algorithms for thin plate spline interpolation to functions of two variables*, in Advances In computational Mathematics : New Delhi, India, eds. H.P. Dikshit and C.A. Micchelli, World scientific (Singapore), (1994), 303-319.
- [170] M. J. D. Powell, *The uniform convergence of thin plate spline interpolation in two dimensions*, Numer. Math. 68, (1994), 107-128.
- [171] M. J. D. Powell, M. A. Sabin, *Piecewise quadratic approximations on triangles*, ACM trans. on Math. Soft., vol 3, No 4, (1977), 316-325
- [172] P. M. Prenter, *Splines and variational methods*, Wiley Classics Library, 1975.
- [173] A. Priestley, *A quasi-conservative version of the semi-lagrangian advection scheme*, Mon. Wea. Rev. 121, pp 621-629.
- [174] P-A. Raviart, *An analysis of particle methods*, In : F. Brezzi, ed., Numerical Methos in Fluid Dynamics. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1127. Springer, Berlin Heidelberg New York, (1985).
- [175] M. Reiser, *Theory and design of charged particle beams*, Wiley series in beam physics and accelerator technology, (1994).
- [176] R. Robert, *Unicité de la solution faible à support compact de l'équation de Vlasov-Poisson*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 324, (1997), 873-877.
- [177] A. Robert, *A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations*, Atmos. Ocean. **19**, 35-46, (1981).
- [178] P. Sablonnière, *Interpolation d'Hermite par des surfaces de classe C^1 quadratiques par morceaux*, dans Actes du deuxième congrès international sur les méthodes numériques de l'ingénieur (Dunod, Paris) 175-185.

- [179] P. Sablonnière, *Composite finite elements of class C^k* , J. of Comput. Appl. Math. 12&13 (1985) 541-550.
- [180] P. Sablonnière, *Error bounds for Hermite interpolation by quadratic splines on an α -triangulation*, IMA J. of Numer. Anal., 7, (1987), 495-508.
- [181] R. Schaback, *Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation*, Adv. in Comput. Math. 3, (1995) 251-264.
- [182] R. Schaback, *Comparison of radial basis function interpolants*, In : Multivariate approximation from CAGD to wavelets (H. Jetter, F. Utreras, eds.), London, World Scientific, 293-305.
- [183] R. Schaback, *Approximation by radial basis functions with finitely many centers*, Constr. Approx. 12, 331-340, (1996)
- [184] J. Schaeffer, *Global existence for the Poisson-Vlasov system with nearly symmetric data*, J. Diff. Eq., 69,(1987), 111-148.
- [185] J. Schaeffer, *Global existence of smooth solutions to the Vlasov-Poisson system in three dimension*, Comm. in Partial Differential equations, 16 (8&9), (1991), 1313-1335.
- [186] J. Schaeffer, *Convergence of a difference scheme for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in one dimensions*, SIAM J. Numer. Anal., **35**, No. 3, 1149-1175, (1998).
- [187] M.M. Shoucri, R.R.J Gagné, *A multistep technique for the numerical solution of a two-dimensional Vlasov equation*, J. Comput. Phys. 23 (1977) 242.
- [188] M.M. Schoucri, G. Knorr, *Numerical integration of the Vlasov equation*, J. Comput. Phys. 14 (1974) 84.
- [189] J.W. Schumer, J.P. Hooloway, *Vlasov simulations using velocity-scaled Hermite representations*, J. Comput. Phys. 144 (1998) 626-661.
- [190] J.S. Scroggs, F.H.M. Semazzi, *A conservative semi-Lagrangian method for multidimensional fluids dynamics applications*, Numer. Meth. for Part. Diff. Eqs., 11 445-452 (1995).
- [191] D. Shepard, *A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data*, in Proceeding ACM National Conference (1968), 517-524.
- [192] R. Sibson, G. Stone, *Computation of thin plate splines*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol. 12, (1991), 1304-1313.
- [193] E. Sonnendrücker, J. Roche, P. Bertrand, A. Ghizzo, *The semi-Lagrangian method for the numerical resolution of Vlasov equations*, J. Comput. Phys., **149** (1996), 841-872.
- [194] O. Coulaud, E. Sonnendrücker, E. Dillon, P. Bertrand, A. Ghizzo, *Parallelisation of semi-Lagrangian Vlasov codes*, J. Comput. Phys., **61** (1999), 435-448.
- [195] P.K. Smolarkiewicz, J.A. Pudykiewicz, *A class of semi-Lagrangian approximation for fluids*, J. Atmospheric Sci., **49** (1992), 2082-2096.

- [196] A. Staniforth, J. Cote, *Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models-a review*, Monthly Weather Review, **119** (1991), pp. 2206-2223.
- [197] S. Gravel, A. Staniforth, *A Mass-conserving Semi-Lagrangian scheme for the Shallow-Water Equations*, Mont. Weath. Rev., (1994) 243-248.
- [198] R. Tanaka, T. Nakamura, T. Yabe, *Constructing exactly conservative scheme in a non-conservative form*, Comp. Phys. Comm., **126** (2000), 232-243.
- [199] T. Tang, *The Hermite spectral method for Gaussian-type function*, SIAM, J. Sci. Comput. 14, 594 (1993).
- [200] S. Ukai, T. Okabe, *On classical solution in the large in time of two dimensional Vlasov's equation*, Osaka, J. Math. 15, (1978), 245-261.
- [201] H.D. Victory, K. Ganguly, *On the convergence of particle methods for multidimensional Vlasov-Poisson systems*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., Vol 26, No. 2, (1991), 249-288.
- [202] H.D. Victory, E.J. Allen, *The convergence theory of particle-in-cell methods for multidimensional Vlasov-Poisson systems*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., Vol 28, No. 5, (1991), 1207-1241.
- [203] H.D. Victory, G. Tucker, K. Ganguly, *The convergence analysis of the fully discretized particle methods for solving Vlasov-Poisson systems*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., Vol 28, (1991), 955-989.
- [204] H.D. Victory, K.J. Havlak, *The numerical analysis of random particle methods applied to Vlasov-Poisson-Fokker-Planck kinetic equations*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., Vol 33, No. 1, (1996), 291-317.
- [205] H.D. Victory, K.J. Havlak, *On deterministic particle methods for solving Vlasov-Poisson-Fokker-Planck systems*, S.I.A.M. J. Numer. Anal., Vol 35, No. 4, (1998), 1473-1519.
- [206] H. Wendland, *Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis function on minimal degree*, J. of Approx. Theory 93, 258-272, (1998)
- [207] S. Wollman, *Global in time solutions of the two dimensional Vlasov-Poisson system*, Comm. Pure Appl. Math. 33, (1988), 173-197.
- [208] S. Wollman, *Local existence and uniqueness theory of th Vlasov-Maxwell system*, J. Math. Anal. Appl 127, (1987), 103-121
- [209] S. Wollman, *On the approximation of the Vlasov-Poisson system by particles methods*, S.I.A.M. J. Numer. Anal. Vol 37, No 4, (2000), 1369-1398
- [210] S. Wollman, E. Ozizmir *Numerical approximation of the one-dimensional Vlasov-Poisson system with periodic boundary conditions*, S.I.A.M. J. Numer. Anal. Vol 33, (1996), 1377-1409
- [211] Z. Wu, R. Schaback, *Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data*, IMA J. Numer. Ana, 13, (1993), 13-27.
- [212] F. Xiao, T. Yabe, *Completely conservative and oscillationless semi-Lagrangian schemes for advection transportation*, J. Comp. Phys., **170** (2001), 498-522.

- [213] T. Yabe, F. Xiao, T. Utsumi, *The constrained interpolation profile method for multiphase analysis*, J. Comp. Phys., **169** (2001), 556-593.
- [214] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [215] H. Yoshida, *Construction of higher order symplectic integrators*, Phys. Let. A 150 (1990), 262-268
- [216] S. I. Zaki, L. R. Gardner, T. J. M. Boyd, *A finite element code for the simulation of one-dimensional Vlasov plasmas*, I Theory, J. Comput. Phys., **79** (1988), **184**, II Applications, J. Comput. Phys., **79** (1988), 200.
- [217] S.T. Zalesak, *Fully multidimensional flux corrected transport algorithms for fluids*, J. Comput. Phys., 31-3 : pp. 335-3362, (1979).
- [218] Y. Zheng, A. Majda, *Existence of global weak solutions to one component Vlasov-Poisson and Fokker-Planck-Poisson systems in one space dimension with measures as initial data*, Comm. Pure Appl. Math., 47, (1994), 1365-1401.

Résumé : Ce travail est consacré à l'étude mathématique et numérique de l'équation de Vlasov sur des maillages non structurés de l'espace des phases. Dans une première partie on présente de nouvelles méthodes numériques de type semi-Lagrangien pour résoudre l'équation de Vlasov sur des maillages non structurés de l'espace des phases. L'équation de Vlasov mettant en jeu des phénomènes physiques multi-échelles on présente aussi des méthodes numériques adaptatives basées sur une analyse multi-résolution par ondelettes, conduisant à un raffinement adaptatif de maillages. L'apparition des supercalculateurs massivement parallèle permet de considérer ces méthodes en plusieurs dimensions dans l'espace des phases. Dans la deuxième partie on présente des preuves rigoureuses de la convergence de plusieurs schémas numériques pour le système de Vlasov-Poisson et des estimations *a priori* sur la vitesse convergence des suites de solutions construites vers la solution du problème continu dans le cadre des solutions fortes et classiques. D'abord on démontre la convergence d'un schéma semi-Lagrangien sur un maillage non structuré de l'espace des phases avec des hypothèses de régularité minimales sur les données initiales. Lorsque les solutions classiques sont assez régulières, on prouve la convergence de plusieurs classes de schémas semi-Lagrangien d'ordre élevé selon que l'on envisage des reconstructions à partir de bases de polynômes de Lagrange symétriques, de B-splines et d'ondelettes. Enfin on montre la convergence d'un schéma semi-Lagrangien dans lequel on propage les gradients de la fonction de distribution afin d'obtenir une reconstruction d'ordre élevé et stable de la solution.

Mots clés : système de Vlasov-Poisson, méthodes semi-Lagrangiennes, analyse de convergence, physique des plasmas, faisceaux de particules chargées.

Abstract : This work is dedicated to the mathematical and numerical studies of the Vlasov equation on phase-space unstructured meshes. In the first part, new semi-Lagrangian methods are developed to solve the Vlasov equation on unstructured meshes of phase space. As the Vlasov equation describes multi-scale phenomena, we also propose original methods based on a wavelet multi-resolution analysis. The resulting algorithm leads to an adaptive mesh-refinement strategy. Particularly, these numerical schemes are applied to plasma physics and charged particle beams in the case of two-, three-, and four-dimensional Vlasov-Poisson systems. In the second part we prove the convergence and give error estimates for several numerical schemes applied to the Vlasov-Poisson system when strong and classical solutions are considered. First we show the convergence of a semi-Lagrangian scheme on an unstructured mesh of phase space, when the regularity hypotheses for the initial data are minimal. Then we demonstrate the convergence of classes of high-order semi-Lagrangian schemes in the framework of the regular classical solution. In order to reconstruct the distribution function, we consider symmetrical Lagrange polynomials, B-splines and wavelets bases. Finally we prove the convergence of a semi-Lagrangian scheme with propagation of gradients yielding a high-order and stable reconstruction of the solution.

Key words : Vlasov-Poisson system, semi-Lagrangian methods, convergence analysis, plasma physics, charged particle beams.